

## 使用利率期貨契約來規避利率現貨的價格波動 —以利率期間與凸性為避險比率測量基準

◆ 國立高雄第一科技大學  
風險管理與保險系  
● 指導教授：蘇恩德 博士  
研究生：邱宗輝

### 摘要

由於銀行業者與保險業者極需規避持有短長期固定收益證券的利率風險，因此現今期交所在93年1月推出10年期公債發行後，也於同年5月推出30天期利率期貨，而利率避險者在期貨市場上要操作多少利率期貨契約才是最佳的策略，便成為一重要的避險研究課題。就利率風險的說明而言，最常使用的是利率期間與凸性，因此本文也針對利率期間與凸性來測度與說明利率風險，進而求算利率風險免疫的避險比率，並比較不同的避險模型的避險效果，如一測度(利率期間)的避險比率或Goodman and Vijayaraghavan的二測度避險比率。此外，也因利率波動的非平行移動，因此避險者也需要了解實務上的利率波動情形，所以利用殖利率模型來說明利率風險因素的變動與預測模擬風險情境也是本文要說明的主題，也可了解風險因素(如利率曲線的水平和斜率、曲度)的規避情形，使避險者了解避險重點之所在。最後，進行風險值分析，則是擬給予避險者對所持有的現貨或期貨的風險值成份有所認知，而風險值的敏感性分析則在闡明避險比率的變動而引發的風險值波動的大小。

關鍵字：利率期貨、避險比率、利率期間、債券凸性、風險情境分析、風險值分析

### 壹、緒論

#### 一、研究動機

台灣的利率型期貨商品現今已有10年型公債與30天型利率期貨的發行，其是以貨幣市場或債券市場各類證券為標的資產的期貨合約，主要用以移轉利率變動風險。對於長期或短期利率現貨的擁有者(例如擁有長期公債的投資人或保險業者與長期房屋貸款的銀行業者或短期票券的持有人)而言，過去是受限於利率避險商品不足，銀行業者並未能提供規避利率風險的融資商品，保險業者也未能規避其債券投資的利率風險，僅少數大型廠商方有能力發行債券取得長期固定利率資金。現今利率期貨商品的發行，實可提供金融業者規避因長短期利率水準波動而使持有長短期利率現貨價格變動的利率風險，而會影響利率變動的風險因子有：

經濟成長率--經濟發展速度較快時，資金需求旺盛，利率趨升，反之，經濟緊縮時，利率趨跌。

貨幣供給量--相對於景氣發展水準，若貨幣供給過剩時，利率走跌；供給不足時，利率趨升。

外匯經常帳--資本帳的資金流動將會對利率造成影響。

他國利率水準--目前國際間資金流動頻繁，不同國家間的利率容易相互影響。

其他因素政治環境、天災、恐怖攻擊。

舉利率期貨的避險實例而言，如果A銀行發行6月1日發行1年期2億元機動利率定存單，由B證券購入持有，該定存單每三個月付息一次，並分別於期初確定利率，期末付息，存單利率為銀行隔夜拆款利率加碼20基點。A銀行可就9月初訂價應付利息不確定性進行避險，B證券則可對9月初訂價應收利息不確定性進行避險。避險口數為：

$$(200000000/100000000) \times (3 \text{ 個月}/1 \text{ 個月}) = 6 \text{ 口}$$

A銀行可於每次期初確定利率時，賣出6口期末付息月份的30天期CP利率期貨；B證券可於每次期初確定利率時，買進6口期末領息月份的三十天期CP利率期貨。

以指數型房貸避險為例，小華有20年期指數型房貸1000萬，未來利率可能上升，要如何進行避險？由於本利攤還，假設平均每年房貸餘額為800萬，若利率每上升1%，則還款利息支出將增加： $20 \times 800 \text{ 萬} \times 1\% = 160 \text{ 萬}$ ，此時可以考慮以30天期CP利率期貨進行避險，報價利率變動1%之損益為82200元，賣出20口近月30天期CP利率期貨，假設成交價98.9，並於近月合約到期前持續進行轉倉。

後續由於景氣熱絡，物價指數攀升，央行在後續1年內，調升利率2碼，小華房貸亦調升2碼，利息支出增加 $20 \times 800 \text{ 萬} \times 0.5\% = 80 \text{ 萬}$ 。

30天期CP利率期貨成交98.45，平倉出場：

$$\text{獲利} : 20 \text{ 口} \times [(98.9 - 98.45) / 0.005] \times 411 = 739800 \text{ 元}$$

$$\text{利率上升損失} : (-800000 + 739800) = -60200 \text{ 元}$$

而利率期貨的投機實例而言，利率與債券價格為反向關係，若投資者預期利率將上升(下降)，即可在期貨市場賣出(買進)利率期貨，若利率果真上漲(下降)，利率期貨價格將下跌(上漲)，則平倉出場將可賺取利率期貨價差。實例：投資人由利率長期維持低檔，資金充沛，股市出現復甦，景氣看好，預估央行將調升利率，即可賣出一口台灣期貨交易所十年期公債利率期貨，成交價112。

後續因主計處公布物價報告CPI大幅揚升，市場預期央行調升機率大幅升高，公債現貨殖利率下跌，期貨價格上升至113，若此時平倉，則可獲利：

$$5000000 \times (113 - 112) / 100 = 50000 \text{ 元，}$$

$$\text{或一口 } [(113 - 112) / 0.005] \times 250 = 50000 \text{ 元。}$$

而傳統的利率風險規避的模型，主要是以負債與資產的利率期間免疫(duration immunization)，也就是負債與資產有相同的利率期間，因此利率的波動就不會對價格造成太大的影響。而對固定收益證券波動的一般衡量，也是以利率期間為主，而利率期間是債券價格波動性的線性成份，其是債券價格與利率關係的負斜率，也就是當利率下降時，債券價格的變動便會與利率期間成正比例的變動，但是對於利率的大變動而言，以利率期間來衡量價格變動的誤差也跟著變大，而凸性(convexity)的效果在此時也變的更重要，而其也是純以利率期間衡量價格變動誤差的來源。

對於避險的效果而言，如果現貨債券與利率期貨有較接近的利率期間與凸性的特性，則此時避險的效果便較有效。而傳統上利率風險規避，為了要使避險者的債券投資組合有較少的波動，只利用利率期間來決定利率期貨避險的避險比率，因此當利率有較大的波動時，便會因忽略了凸性而使得避險的效果不如預期。因而也有贊成利用動態利率期間避險的學者，主張當利率隨著時間變動時，避險比率也要跟著調整來提高避險的效果，但是由於調整避險比率也會提高交易的成本，而且最佳的避險比率調整時間也難以決定，因此此種避險的方式對較大利率變動時的避險效果也變得不好。

## 二、研究目的

本研究的目的乃是在於提供利率現貨的擁有者一有效的利率風險的規避方法，在實務上，現貨債券利率風險的規避方式是以多空操作相對的利率期貨，使得利率的波動可以藉由現貨與期貨對利率的反向反應而使得避險組合的風險(變異)變小，因此若可找出最適化的期貨單位投入到現貨投資組合中，便可建構一風險(變異)極少化的避險組合。

但利率期貨契約要有多少單位加入到現貨債券(投資組合)中，也就是最適化的避險比率是多少？才能有最小化的利率風險---因利率波動而使得投資組合價值變動的風險---便成為利率風險規避者必須探討的主題。傳統上，避險比率的求法是利用利率期間為基礎來求算，但因債券價格與利率的關係是為非線性的，若以單純線性的方式(利率期間)來測度價格的變動，其避險誤差便會相對的提高，而近期利率風險規避的方法中，實務上的有二測度避險比率(two instrument hedge ratio)的方法，其是同時考慮了利率期間與凸性效果的測量而進一步計算避險比率的方法，而且由於其靜態避險的效果比以利率期間為基礎的避險效果還

好，因此不必常常改變避險比率，避險成本也就較小。此研究將比較 Goodman-Vijayaraghavan (1987,1989)的二測度避險比率與利率期間凸性(duration-convexity)的二測度避險比率方法，並以傳統的利率期間為避險比較的基礎，求算各避險方法的避險比率並比較各避險方法的避險效果。

此外，殖利率曲線的波動也會影響到債券價格的變動，雖然殖利率曲線的波動若是水平且不大時，以利率期間為基礎的避險方法的避險效果是不會太差，但是實務上殖利率的變動並非是平行變動的，因此實有必要建構殖利率曲線模型來模式化其波動情況，進而利用此模型來模擬不同時期(短、中、長期)利率的變動，並測試各不同利率避險模型對模擬或預測的利率波動的避險效果，尤其是當短、中、長期利率有較大的變動時或殖利率曲線的水平、斜率、曲度有較大的變動時，避險組合價值會有何相對的變動反應？是否避險組合的避險效果還是令避險者滿意，也是值得實證分析的主題。

對利率風險的避險者而言，前述的避險比率、殖利率線波動有進一步的了解後，其也想知道投資組合的風險成份與敏感性，因此風險值的分析：包括風險值成份分析，來探討個別投資標的的風險值或整體投資組合的風險值成份，甚至是來自於殖利率模型中的風險因素的風險值成份；也包括風險值敏感性分析，即是前述的風險成份在單位投資金額增加或減少下或投資比例變動下會如何變動的衡量，所以風險成份與敏感性對避險者而言不僅可以了解投資組合風險的來源，同時也可了解當其變動避險比例(也就是投資金額比例)時其風險成份會如何變動，此主題因此也有研究的必要性。

## 三、研究架構

本研究的架構主要分為研究動機與目的、文獻探討、研究設計與方法、實證結果與分析與最後的結論與建議，其主研究流程圖如圖[1]，而對於研究方法的細部說明則如圖[2]，主要是先建構短中長期利率現貨與利率期貨的避險組合，再測度風險敏感性(利率期間與凸性)，利用一或二測度的風險免疫法求算避險比率，實務上的利率波動則由殖利率模型來說明，並模擬與預測各期的利率走勢與避險效果，與進行風險值與避險比率變動而引起的風險值變動的 analysis。

## 貳、文獻探討

### 一、中文文獻探討

現貨利率風險主要是來自於利率結構的變動，短、中、長期的利率波動對固定收益的價值或再投資收益是有決定性的影響，而對於利率的敏感性一般是以利率期間與凸性來探討，而利用此二利率風險敏感性的衡量，在免疫(immunization)的條件下，也就是利

率風險敏感性為最小化時，便可求得利率避險組合中期貨契約的避險比率(hedge ratio)。但是利率風險敏感性的測量卻是建立在殖利率是平行移動的假設上，因此以免疫為基礎的避險模型的避險效果分析，便須考慮到殖利率結構移動的影響。最後也可以情境模擬來說明風險敏感性、避險比率、與避險效果或以風險值分析將風險成份的風險或避險比率的風險變動給予貨幣量化。

蘇雅芬(2003)分別採用未避險模型，傳統避險Naive模型，OLS模型及動態避險GARCH模型做為避險比率的估計是從事避險交易的重要關鍵。李文孝(2004)透過交叉避險探討在不同避險模型以及不同避險期間下是否有顯著的效果。吳秉宗(2004)使用部分整合自回歸條件變異數(FIGARCH)計算長期利率期貨多空部位的每日風險值。楊孟波(2002)使用以(Nelson & Siegel (1987)的Parsimonious model 為基礎，以高斯-牛頓法估計台灣公債市場的利率期限結構，在期限結構變動的情況下對債券投資組合，作各種免疫模型績效的比較。廖源龍(2002)探討我國票券利率期貨的研究與契約的設計。賈松濤(2003)探討國內金融機構如何運用固定收益衍生性金融商品(Fixed Income Derivatives)，來管理各項資產負債部位的利率風險。魏志良(2002)運用傳統OLS模型，誤差修正模型，單變量GARCH(1,1)，雙變量GARCH(1,1)與經卡曼濾淨器動態調整等避險模型來估計避險比率。林靖文(2001)採用包括價差迴歸模型(OLS)，誤差修正模型(ECM)，誤差修正GARCH模型(EC-GARCH)，存續期間模型(Duration)及存續期間與凸性模型(Duration-Convexity)在不同避險模型下的樣本避險績效。羅月環(1999)採用OLS計量模型，算出樣本期間所有的避險比率，並探討其與現貨利率價格之間關係。汪明瑜(1999)利用利率期限結構概念在無風險套利基礎上，研究票券期貨的理論價格，再以期貨的避險理論，設計例題探討票券期貨的各種運用，分析票券期貨規避短期利率風險之可行性及結果。黃文俊(1997)採用Lee(1993)所提出動態期貨契約存續期間模型(Additional Time-Varying Duration Model)，是以每日結算價格為基礎求出，這主要是將期貨市場上每日逐算特性加以考慮，並減低在交割日前，因時間因素所引發再投資風險，對整個投資組合免疫效果之影響，以增加投資組合利率風險免疫能力。陳秘順(1992)採用分別以歷史標準差法和隱含標準法(簡單平均)等二方法推估，並以之為基礎分別實證該模型定價之精確性。吳逸豪(1997)探討在不同的利率期間結構變動型態之下，下列各種免疫策略的免疫效果：存續期間免疫法，M絕對值，M平方及M Vector免疫法等。夏青佑(1996)採用曲線配適(Curve Fitting)的方法，建立利率期間結構，於此架構下進行此種避險策略的運用，並與由存續期間架構出發的避險策略做比較，分別選取與此策略有微妙相似性，然出發點假設截然不同的存

續期間避險策略(Duration Hedge)及該方案進一步擴充的Yield Beta存續期間避險策略(Yield Beta Duration Hedge)，進行避險效率的比較。賴曉璐(1996)利用Nelson & Siegel(1987)將造成國內政府公債殖利率曲線變動的因子分解成三個：平行移動，斜率改變，曲度變動，藉由此種分解找出影響政府公債殖利率曲線變動的主要因素，依此選擇適當的免疫策略，並從衡量這三個因子的指標，推論出殖利率曲線的型態。陳治國(1994)：主要利用OLS模式及ARCH模式估計風險極小化之最適避險比例，並針對不同避險期間估計最適避險比例及效果，以了解避險期間與避險比例及避險效果之間的關係。林聰欽(1994)探討國內債券市場如何決定債券殖利率之風險貼水及交易成本貼水，其中風險貼水可分為時間及信用風險兩部份，屬於前者之重要變數有存續期間(Duration)與凸性(Convexity)，屬於後者則有信用評等(Credit Ranking)與銀行擔保效果，而交易成本分析是在控制風險貼水因素後，看稅賦效果是否會影響投資者之必要報酬率，亦對殖利率曲線作分析，討論長短期資金市場是否存在明顯互動關係。

## 二、Kolb and Chiang提出以利率期間為基礎的避險比率 Goodman and Vijayaraghavan提出二測度(利率期間與凸性)的避險比率 Nelson and Siegel與Jones提出{水平(level)斜率(slope)曲度(curvature)}與利率期間(Duration)關係

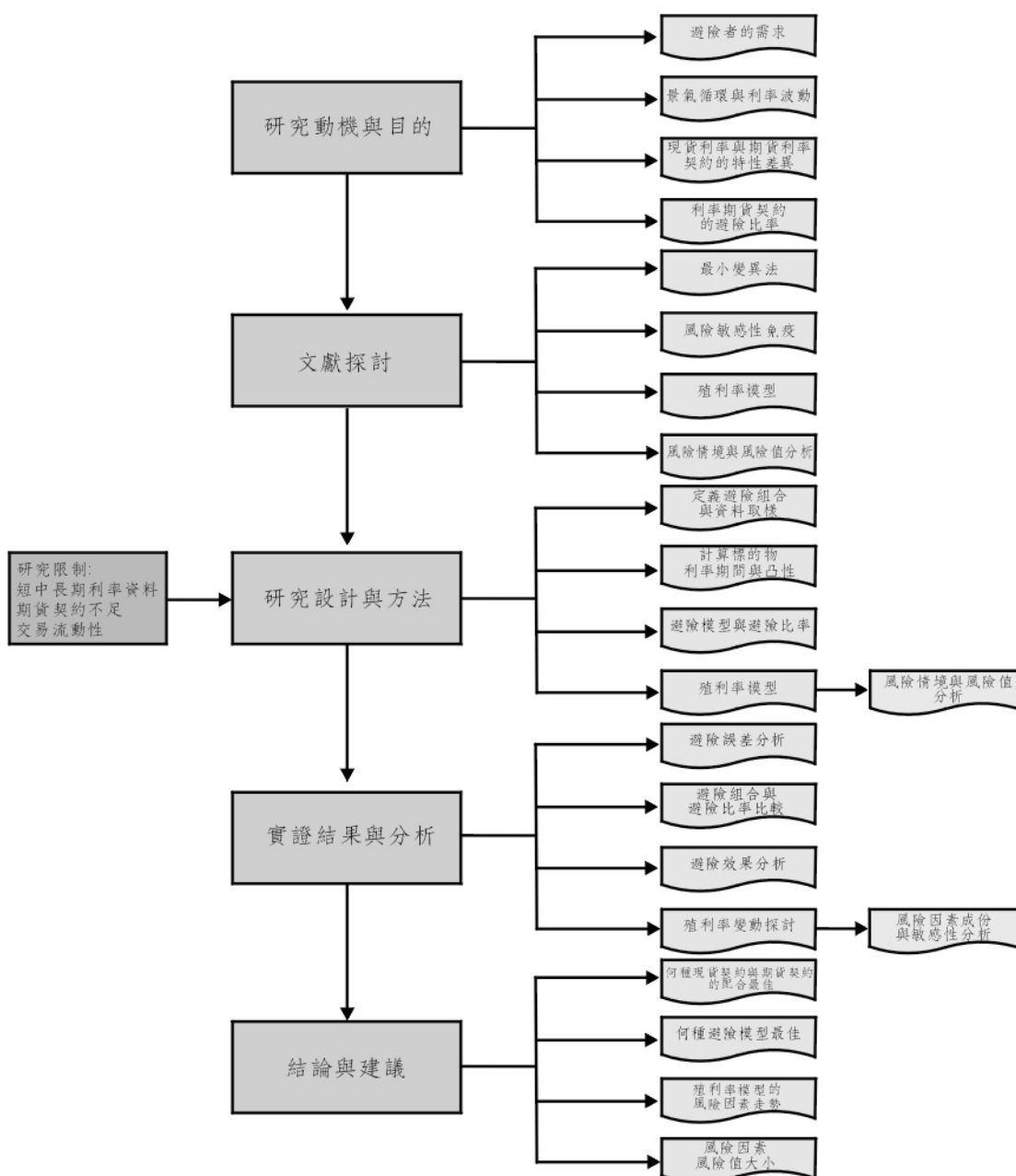
對於利率避險比率的探討，學者Kolb and Chiang(1981,1982)首先提出一以利率期間為基礎的避險比率方法來規避現貨利率的風險，Goodman and Vijayaraghavan (1987, 1989)則提出了二測度(利率期間與凸性)的避險比率方法。而殖利率曲線的移動在實務上是非平行的，此種情形，學者如 Lee and Oh (1993)，Reitano(1990, 1992) Willner(1996)，已注意到此現象。而對於殖利率模型走勢的說明則是McCulloch(1975)首先提出了立方弧折價方程式(cubic spline discount function)來模式化不同到期的利率結構，Vasicek 與 Fong(1982)改進此立方弧折價方程式成為指數的曲弧方程式，其相對的也較適於實際的利率結構指數。在1990年代以後則有許多的學者依據指數的曲弧方程式而提出更多的實用的利率結構模型，例如Nelson and Siegel(1987)與Jones(1991)提出三種因素組成的利率結構模型：水平(level)、斜率(slope)、曲度(curvature)，此模型是依水平、斜率、曲度所形成的線性模型，在取出適當的利率結構的駝峰時點( $\tau$ )，及估計的水平、斜率、曲度後，其將非常配合實際的利率結構。Willner(1996)承續此三因素的模型，而探討此三因素與利率期間(Duration)的關係，因而有水平利率期間、斜率利率期間、曲度利率期間的探討，由三因素模型間的利率期間的大小，吾人也可以配合三因素的相關性而來求得利率風險的大小。

風險值是風險量化的工具，可以將個別投資標的或整體投資組合的風險予以貨幣單位表示，其表示在特定信心水準下與投資時間水平下，最大的損失金額是多少，也就是風險成份的分析，RiskMetrics在其1995年的技術文件中有提到債券的風險值的計算，但是是以主利率(key rate)利率期間來說明，因此可以說明3個月、半年、1年、2年、3年、5年...等的風險值，若以投資組合中的標的物的利率期間來說明風險值，則可以短、中、長期利率期間的風險值，或以三因素水平、斜率、曲度的利率期間也可說明風險因素的風險值。而風險值的敏感性分析，則是說明投資標的或風險因素的敏感性投資標的是投資組合中的投資項目而

風險因素則是殖利率模型中的三個風險因素，由風險值敏感性分析中，吾人可以了解當避險比率(也就是投資比例)變動時，各投資標的或三個風險因素的風險值會如何變動，是一動態的分析。

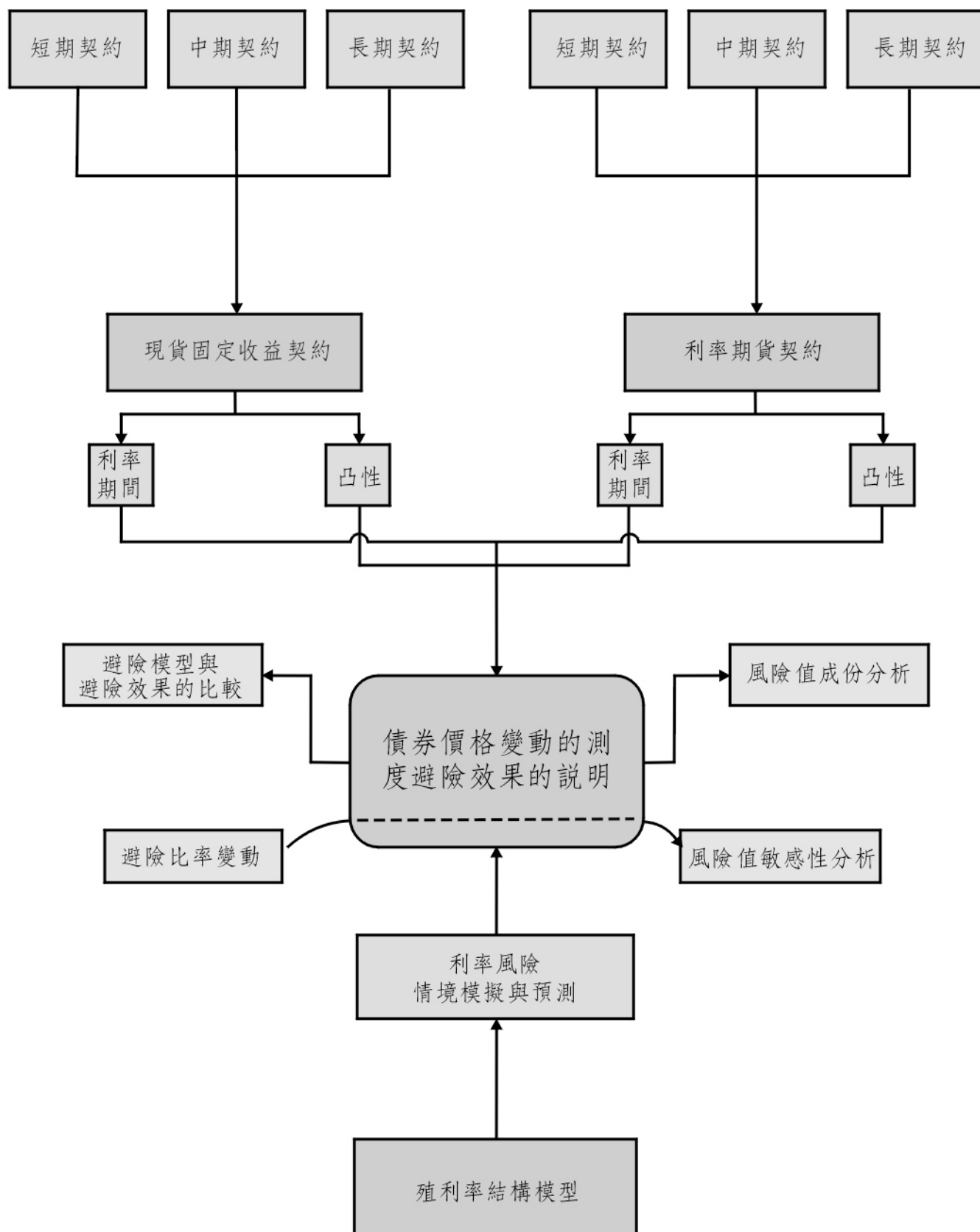
### 參、研究設計與方法

現今利率現貨的持有者:如銀行業者持有房屋貸款;或保險業者持有政府債券皆是屬於長期的利率持有者，而若是屬於短期的利率持有者則屬國庫券、商業本票、可轉讓定期存單的持有人，因此本研究的期貨避險工具會以短、中、長期的期貨契約為基礎，分別探討長短期利率持有者的最適化避險比率。



圖[1]主研究架構





圖[2]研究方法的細部流程圖

後續的研究則是以利率風險情境模擬分析為主，殖利率波動的模型是首先要說明的，水平(level)模型的常數項、利率(slope)模型的一階函數、曲度(curvature)模型的二階函數的殖利率模型則是一很好的風險情境分析模型，因為殖利率變動的風險因素利用此模型可分為水平、利率、曲度的成份，投資人或避險者依實際的殖利率曲線的分佈，便可認知殖利率曲線中水平、利率、曲度代表的意義，比其他沒有實質風險因素意義的殖利率分析模型(如主成份分析，或多項式時間的非線性模型)較有風險分析的價值。例如殖利率曲線若水平或斜率的風險成份波動較大時，投資人或避險者的避險組合的線性成份的風險會變大，因此利率期間風險規避的要求便要很高，而若曲度的變動較大時，則其凸性成份風險規避的要求便要加強。爾後利用實證後的殖利率模型，吾人也可模擬或預測水平、斜率、曲度的走勢，來探討各不同避險模型的避險效果，並進一步分析此三因素在避險組合中所佔的風險成份。

風險模擬情境分析的另一有利的工具是風險值的分析，其對於風險情境的描述，是以投資標的在某一信心水準與時間水平下的最大貨幣損失來說明，因此風險的量化是隱含了發生機率與時間水平的風險觀念，可分析不同的信心水準與投資時間水平下，最大的損失金額會是多少？對避險組合的投資標的或殖利率模型的三因素的風險情境描述就較詳盡。另外，風險值敏感性分析則是在分析當避險比率變動時(也就是期貨契約投入的單位數)變動時，避險組合的風險值會有何變化，對避險者也是有用的風險參考數據。

### 一、價格變動、利率期間、凸性的關係

對於利率風險的衡量，對固定收益型的證券或票券而言，是以利率敏感性，例如利率期間與凸性說明，就利率期間而言，以言語表示的意義是債券現金流量回收的速度，因此就無息債券而言其現金回收的速度就是其到期日，而就有票息債券而言，其利率期間就是各期折現後的現金流量對回收期間的加權效果。而期貨契約的利率期間則以最便宜交割債券的利率期間為基礎，再以其價格相對於轉換價值的比例加權為期貨契約的利率期間。價格(P)與利率期間(D)的關係式如下：

$$D = \sum_{t=1}^n \frac{tc(t)}{(1+i)^t} / P \quad \dots\dots\dots(1)$$

式中

P是債券當期的價格，其式子是  $P = \sum_{t=1}^n c(t)/(1+i)^t$

C(t)表示各期的票息

也可將取價格對利率的第一階導函數而得到：

$$D = -\frac{dp}{di} * 1/p * (1+i)$$

對於以利率期間來避險，也許可以假定因利率期間所引發的現貨與期貨的避險誤差是相當的，可將誤差忽略掉。但是利率期間避險誤差的大小是與避險標的與避險工具的特性的相似性強度有關，如果現貨與期貨的變動特性有很大的不同，則現貨與期貨的價格、與利率期間的差異會很大，而此差異就來自於非線性的凸性成份，也是以利率期間為避險的誤差來源，凸性可定義為如下式：

$$C_t = \sum_{t=1}^M t(t+1)w_t \quad \dots\dots\dots(2)$$

其中  $C_t$  是工具j的凸性， $w = \frac{CF_t/(1+i_j)^t}{\sum_{t=1}^M CF_t/(1+i_j)^t}$  是各期債券

現金流量的加權。

因此為了解決利率期間測度債券價格變動的誤差，以及因現貨與期貨的風險敏感性不一致所招致的問題，要提高避險效果(較佳的價格變異的測度)，吾人必須同時考慮利率期間與凸性效果對債券價格的影響，因此 Goodman and Vijayaraghavan (1987,1989) 提出了一二測度(利率期間與凸性)避險比率，其是將現貨債券與期貨債券的利率期間與凸性令為相等而求算避險比率。

Goodman and Vijayaraghavan 定義凸性為：

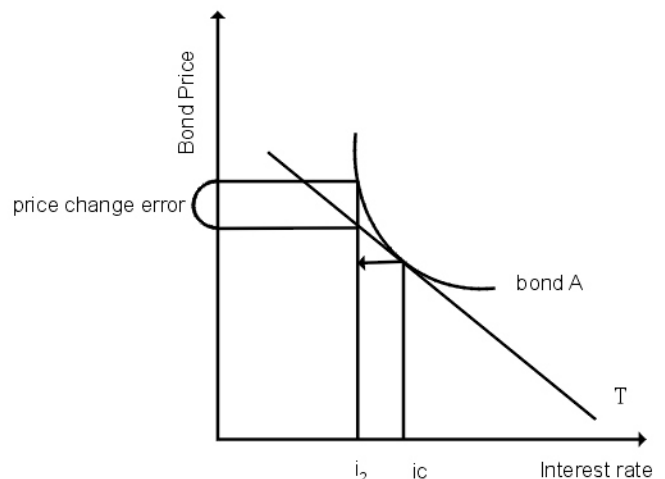
$$C_t = \sum_{t=1}^M t^2 w_t \quad \dots\dots\dots(3)$$

而一般的凸性的定義是如公式(2)，

$$C_t = D + \sum_{t=1}^M t^2 w_t = \sum_{t=1}^M t(t+1)w_t$$

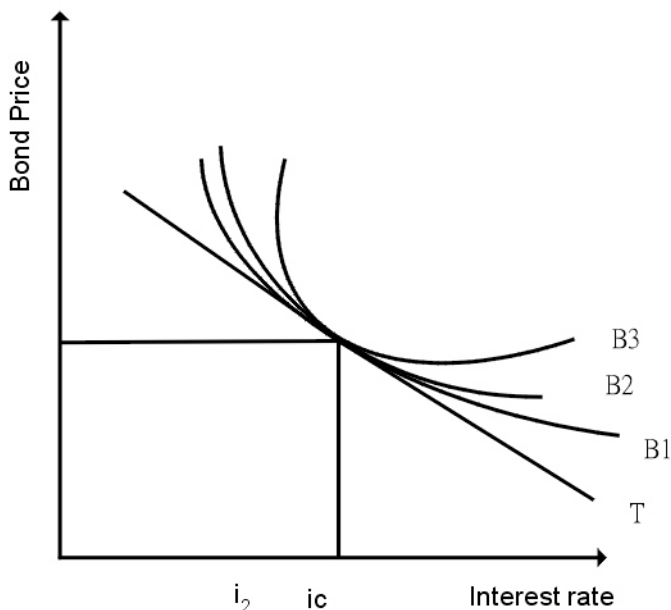
，因此 Goodman and Vijayaraghavan 的凸性定義忽略了利率期間項。

債券價格的變動、利率期間、凸性的關係可用圖形來說明，圖[3]顯示當利率的波動較大時，固定收益

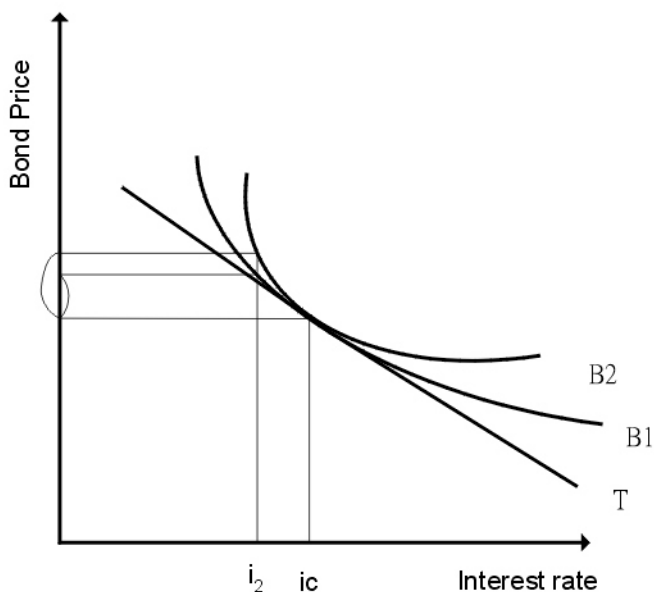


圖[3] 債券價格與利率的關係

的價格變動若純以利率期間來衡量則其測量誤差將會是很大，圖[4]與圖[5]顯示以利率期間為基礎的利率避險因不同的凸性效果而產生價格變動的差異，也就是說若以利率期間為避險的基礎，會因忽略凸性效果而使價格變動的衡量產生極大的差異。表[1]則顯示以利率期間免疫的避險組合價值變動情形，可見以利率期間為風險規避的效果，在當利率變動不大時效果還可以，但是當利率有較大的變動時其避險的效果就變的不好。



圖[4]不同的凸性對債券價格變動的影響



圖[5]不同的凸性對利率期間與債券價格變動的影響

表[1]凸性效果對避險效果的影響

Change in Hedge Yield Ratio	Change in Value of Cash Bond	Change in Value of T-Bond Futures	Change in Portfolio Value	Duration of Cash Bond	Duration of Bond Futures	Hedge Ratio
-3.0	+18.68	+19.13	-0.45	5.319	4.701	1.100
-2.0	+11.95	+13.89	-1.94	5.298	4.295	1.199
-0.5	+2.81	+3.96	-1.15	5.266	3.759	1.362
-0.1	+0.55	+0.82	-0.27	5.257	3.629	1.408
0.0	0	0	0	5.255	3.598	1.420
0.1	-0.55	-0.82	0.27	5.253	3.567	1.431
0.5	-2.71	-3.96	1.25	5.244	3.445	1.480
2.0	-10.24	-13.89	3.65	5.209	3.028	1.672
3.0	-14.81	-19.13	4.32	5.185	2.783	1.811

註：公債期貨是空部位其避險比率是0.577與11.52年的利率期間  
現貨公債是71/4%的票息，10年到期與6.99年的利率期間

## 二、利率期貨的避險比率 (hedge ratio)- 利率期間為基礎

首先吾人先介紹以利率期間為基礎的避險比率方法，也就是一測度的避險比率(one instrument hedge ratio)，Kolb and Chiang (1981,1982) 提出以利率期間為基礎的固定收益避險比率方法，其避險比率以 Macaulay duration 來說明，其結果是如下式：

$$HR_D = \frac{D_B P_B (1 + i_F)}{D_F P_F (1 + i_B)} \dots \dots \dots (4)$$

其中 $D_j$ 是工具 $j$ 的利率期間，而Macaulay的利率期間(duration)是定義為

$$D_j = \sum_{t=1}^M t w_t \dots \dots \dots (5)$$

式中

$CF_t$ 是現金流量

$t$ 是現金流量付現期間

$M$ 是債券到期時的期間數

$P_j$ 是 $j$ 債券的價格

$i_j$ 是債券 $j$ 的殖利率

現貨債券的 $j=B$ ，而期貨債券 $j=F$

$$w = \frac{CF_t / (1 + i_j)^t}{\sum_{t=1}^M CF_t / (1 + i_j)^t}$$

上式中的分母是債券的現貨價值，Macaulay duration是假定殖利率期間應是平行的移動，Gay and Kolb (1983) and Gay, Kolb, and Chiang (1983) 提供了避險比率的例子也顯示如何來執行此模型。但是其也假設殖利率的變動幅度並不大，而價格的變動與利率的變動可以用線性模式來說明。

### 三、利率期貨的避險比率 (hedge ratio)- Goodman and Vijayaraghavan 二測度 (利率時間與凸性) 方法

更明確而言，凸性只是定義第二階效果的利率，債券價值的關係，更高階效果是存在但是很小。

$$H_{LTF} = \frac{C_{STF}D_B - C_B D_{STF}}{C_{STF}D_{LTF} - C_{LTF}D_{STF}} \dots\dots\dots(6)$$

$$H_{STF} = \frac{C_B D_{LTF} - C_{LTF}D_B}{C_{STF}D_{LTF} - C_{LTF}D_{STF}} \dots\dots\dots(7)$$

其中

$H_j$ 是j期貨契約的避險比率

LTF是長期固定收益期貨契約

STF是短期固定收益期貨契約

B 是表示現貨債券

$D^i$ 是表示債券的利率期間

C 是表示債券的凸性

因此只要將利率期間與凸性成份令為相同則可將波動便可消除，但是吾人實際上必須是消除價格變動而非利率期間或凸性，下節將提出二測度避險比率也來說明此要求。

### 四、利率期貨的避險比率 (hedge ratio)- duration Convexity (利率期間與凸性二測度避險方法)

二測度避險方法的目的是為了要消除現貨投資組合與期貨避險部位的價格變動所形成的，一比較合適的避險方法是移除利率期間與凸性的所引起債券價格變動的成份或效果，首先是定義出債券價格的變動與利率期間與凸性的關係，因為利率期間與凸性分別債券價格變動的第一階與第二階的債券價格的微分，因此可以用泰勒展開式來表示這個關係式，式子如下：

$$\Delta P = (dP/di)\Delta i + (1/2!)(d^2P/di^2)(\Delta i)^2 + \dots + (1/k!)(d^kP/di^k)(\Delta i)^k \dots\dots\dots(8)$$

其中  $(d^kP/di^k)$  是價格對利率的第k階微分。將利率期間與第一階導函數的關係和凸性與第二階導函數的關係代入上式，省略第三階以上的導函數項目，則可得到價格變動與利率期間與凸性的關係的式子如下：

$$\Delta P = -DP[\Delta i/(1+i)] + \frac{1}{2}CP[(\Delta i^2)/(1+i)^2] \dots\dots\dots(9)$$

若只以泰勒展開式的第一項來估計(逼近)債券價格的變動，則是為一測度利率期間避險比率(one instrument duration hedge ratio)，若再加入泰勒展開式的第二項，也就是影響債券價格的凸性成份來估計債券價格的變動，則成為二測度的避險比率(two instrument duration-convexity hedge ratio)，同理的加入第三項後，則避險方法變成為三測度的避險比率。

Chambers (1984) and Reitano (1990) 也提出利率期間與凸性配合的方法而不是價格配合的方法來規避現貨風險，

長期契約、短期契約、與現貨債券可以估計。此

$$H_{LTF}P'_{LTF} + H_{STF}P'_{STF} = P'_B \dots\dots\dots(10a)$$

$$H_{LTF}(P'_{LTF} + P''_{LTF}) + H_{STF}(P'_{STF} + P''_{STF}) = P'_B + P''_B \dots\dots\dots(10b)$$

其中

$$P' = -DP[(\Delta i)/(1+i)] \dots\dots\dots(11a)$$

$$P'' = (1/2)CP[(\Delta i^2)/(1+i)^2] \dots\dots\dots(11b)$$

$P'$ 與 $P''$ 是公式(8)的第一項與第二項，因此是與債券價格對利率的第一與第二階導函數有關。當式子(11a)與(11b)代入式(10a)與(10b)式中整理之後則可得到由二未知數HLTF與HSTF所構成的二等式的系統方程式，因此求解此二等式的系統方程式則可得到HLTF如下式：

$$H_{LTF} = \frac{P_B(1+i_{LTF})^2[C_{STF}D_B(1+i_B) - C_B D_{STF}(1+i_{STF})]}{P_{LTF}(1+i_B)^2[C_{STF}D_{LTF}(1+i_{LTF}) - C_{LTF}D_{STF}(1+i_{STF})]} \dots\dots\dots(12)$$

若將公式(4)中的 $HR_D$ 設為 $H_{D,LTF}$ ，則上式成為：

$$H_{LTF} = H_{DLTF} \frac{D_{LTF}(1+i_{LTF})[C_{STF}D_B(1+i_B) - C_B D_{STF}(1+i_{STF})]}{D_B(1+i_B)[C_{STF}D_{LTF}(1+i_{LTF}) - C_{LTF}D_{STF}(1+i_{STF})]} \dots\dots\dots(13)$$

其中  $H_{DLTF}$  是為長期期貨契約一測度利率期間基礎的避險比率。

$$H_{STF} = \frac{P_B(1+i_{STF})^2[C_B D_{LTF}(1+i_{LTF}) - C_{LTF}D_B(1+i_B)]}{P_{STF}(1+i_B)^2[C_{STF}D_{LTF}(1+i_{LTF}) - C_{LTF}D_{STF}(1+i_{STF})]} \dots\dots\dots(14)$$

<sup>1</sup> 期貨契約的利率期間的說明請見附錄一

若將公式(4)中的 $HR_D$ 設為 $H_{D,STF}$ ，則上式成為：

$$H_{STF} = H_{D,STF} \frac{D_{STF}(1+i_{STF})[C_B D_{LTF}(1+i_{LTF}) - C_{LTF} D_B(1+i_B)]}{D_B(1+i_B)^2 [C_{STF} D_{LTF}(1+i_{LTF}) - C_{LTF} D_{STF}(1+i_{STF})]} \quad \dots\dots(15)$$

其中 $H_{STF}$ 是為短期期貨契約一測度利率期間基礎的避險比率。

長期期貨避險比率中的凸性效果，對於現貨債券價格的變動通常會有過度調整的結果，而短期期貨的避險比率通常可以調整長期期貨避險比率對現貨價格變動的估計誤差。

## 五、利率、曲線組成的利率結構模式與風險值分析

水平、利率、曲線是由Nelson和Siegel[1987]提出的利率結構的方程式

$$Y(L, S, C, m) = L + (L + C) \frac{(1 - e^{-m/\tau})}{m/\tau} - C e^{-m\tau} \quad \dots\dots(16)$$

又可定義 $X1(m) = (1 - X2(m))/(-m/\tau)$ 和 $X2(m) = e^{-m\tau}$ ，則利率結構方程式可改寫為

$$Y(L, S, C, m) = L + X1(m)S + (X1(m) - X2(m))C \quad \dots\dots(17)$$

要取得水平、斜率、曲度所含的利率期間則必須對其做全微分

$$dY = \frac{dY}{dL} \Delta L + \frac{dY}{dS} \Delta S + \frac{dY}{dC} \Delta C \quad \dots\dots(18)$$

$$\frac{dY}{dL} = 1, \frac{dY}{dS} = X1(m), \frac{dY}{dC} = (X1(m) - X2(m)) \quad \dots\dots(19)$$

如將債券的價格定為

$$B(m) = \sum \frac{c_t}{(1 + Y(m))^t} \quad \dots\dots(20)$$

上式 $c_t$ 是 $t$ 期債券的現金流量，進一步的債券的價格變動可為如下表示：

$$\begin{aligned} dB &= \frac{dB}{dY} dY \\ &= \frac{dB}{dY} \left( \frac{dY}{dL} \Delta L + \frac{dY}{dS} \Delta S + \frac{dY}{dC} \Delta C \right) \\ &= \frac{dB}{dY} (dL + X1(m)dS + (X1(m) - X2(m))dC) \quad \dots\dots(21) \end{aligned}$$

又債券的利率期間可為 $-(dB/dY)$ ，因此式可說明三因素與利率期間的關係，指出債券價格的變動可表利率期間的一次(first order)或線性關係同時也可為水平、利率、與曲度利率期間的一次關係。對於三因素母數的估計則可以利用簡單的宜線迴歸最小平方方法方法得到要估計的參數，數學式如下：

$$\text{Min}_{L,S,C} \Sigma (Y(L,S,C) - Y)^2 \quad \dots\dots(22)$$

由三因素利率期間的關係程度，吾人同樣的可以導出固定收益的投資組合的風險值

$$VaR = 1.65 \sqrt{\sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 v_m \sigma_m v_n \sigma_n \text{corr}(m,n)} \quad \dots\dots(23)$$

式中 $m, n$ 分別為水平、斜率、曲度的指標， $v_m$ 、 $v_n$ 分別為分配於三因素的價格變動， $\sigma_m$ 、 $\sigma_n$ 、 $\text{corr}(m,n)$ 分別為三因素變動的變異數及相關係數。

當檢視避險效果時，有一相關的問題必須認識的是殖利率曲線的結構及其變動的方式，最近有此文章已有對殖利率曲線非平行移動的避險方式(可參見 Lee and Oh (1993), Reitano (1990,1992) and Willner (1996))。但是皆以利率期間避險或是免疫(immunization)為探討主題，少有提到避險的最適化問題。而殖利率曲線若是平行移動時，各避險模型的差異會較少，而當殖利率有大幅度的變動，或結構的變異有很有的差異，則duration-convexity、二測度的避險方式等各避險模型間的避險差異便會變的很大。

## 肆、實證結果

此研究將基於Macaulay的利率期間與凸性，來說明固定收益避險的二測度避險比率，並進行不同避險模型避險結果的探討，也因殖利率曲線的變動並非平行移動，因此必須模式化殖利率曲線的走勢，進而模擬與預測利率的變動並探討其對避險效果的影響，而為了使避險者能對利率風險的成份與避險比率變動的敏感性有更詳細的認識，因此風險成份風險值的分析與風險成份避險比率的風險值敏感性的分析乃是必要的。

## 資料來源

研究期間自2005年1月1日至2005年3月9日，所取樣本為櫃台買賣中心現貨公債指數、期貨交易所利率期貨成交口數、票券公會統計票券與公債

本研究主要的貢獻如下：



### 一、求算利率風險規避模型的最適化避險比率

以文獻所述，以風險敏感性因子，如利率期間與凸性就可求算最適化的避險比率模型，研究中的避險模型有三種：以一測度的利率期間為基礎的避險方法、以Goodman and Vijayaraghavan的二測度(利率期間與凸性)為基礎的避險方法、duration-convexity 為基礎的避險方法。文獻研究顯示債券價格變動的避險效果，一測度的避險模型在利率波動不大或平行移動下的避險效果較佳，而二測度優於一測度的，二測度中又 duration convexity 優於Goodman-Vijayaraghavan的避險結果，而且使用 duration convexity 的避險成本也較少。

### 二、分析避險模型的避險比例與避險效果

本研究擬以短中長期的利率期貨契約為避險工具，來規避現貨利率風險(長或短期的現貨如公債、長期抵押貸款或國庫券)。表[2]節錄自Daigler(1998)的利率期貨契約避險比率的求算與避險效果的比較表，表[2]A列的是避險組合，表[2]B列的是各投資標的的利率期間與凸性，表[2]C列的是各避險組合的避險比率，最後表[2]D列的是避險組合中各投資標的的價格變動與淨變動。

由投資標的的風險分析中可見長期的利率期貨契約與長期的現貨利率期貨契約的變動方向是反向變動，而短期的利率期貨契約與長期的現貨利率契約是正向的變動，而避險效果若以避險組合的淨價值變動來看，則是duration convexity會有較好的結果，以利率期間的避險模型來操作短期的利率期貨契約以規避長期的利率現貨契約的風險是最不好的。

### 三、探討債券價格測度的貨幣誤差的來源

比較Goodman-Vijayaraghavan (GV)的t公式(3)與公式8到10可發現二不同點首先是利率的因素是表現在durationconvexity中而不沒有在VC的公式中，因此假如殖利率曲線是水平線則二者有相等的避險效果，但若是殖利率曲線非為水平線則二者的避險效果便有差異，第二是現貨債券價格相對於期貨債券價格的比率是出現在durationconvexity中而沒有出現在VC中，因此當現貨與期貨價間的比率若不同也是此二模型避險效果差異的主要來源。

### 四、了解影響避險模型的因素，並留意不同風險敏感性(利率期間、凸性)的免疫效果

表[2]避險模型避險比率與避險效果的比較

Panel A. Input Data

	到期日 Maturity	票息 Coupon	殖利率 Current YTM	現在價值 Current Price	新殖利 率 New YTM	新價值 New Price
3年期現貨公債	2.59	2.5%	1.6139%	100.82	-	-
6年期現貨公債	5.77	5.125%	2.314%	111.587	2.0431%	113.116
10年期現貨公債	9.53	2.625%	2.4066%	100.737	-	-
30天利率期貨	30天	-	0	98.82	-	-
10年期利率期貨	3月	-	-12%	116.31	-	-

資料來源：本研究整理

Panel B Duration and Convexity

	存續期間 Duration	凸性 Convexity	Goodman Current YTM	Vijayaraghavan Current Price
3年期現貨公債	2.47	0.1929	-	-
6年期現貨公債	5.02	2.9341	-	-
10年期現貨公債	8.24	7.2911	-	-
30天利率期貨	0.08333	0.09027	-	-
10年期利率期貨	7.1107086	6.2815073	-	-

資料來源：本研究整理

Panel C. Hedge Ratios

	Short Term Future Hedge Ratio	Long Term Future Hedge Ratio
Macaulay One Instrument Using Short Term Future	1.32	X
Macaulay One Instrument Using Long Term Future	X	1.32
Goodman Vijayaraghavan	-0.71	1.56
Duration and Convexity	-0.423	1.26

資料來源：本研究整理

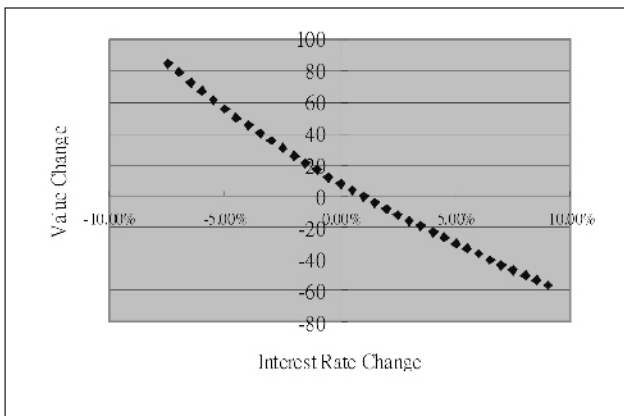
續表[2]

Panel D. Price Change

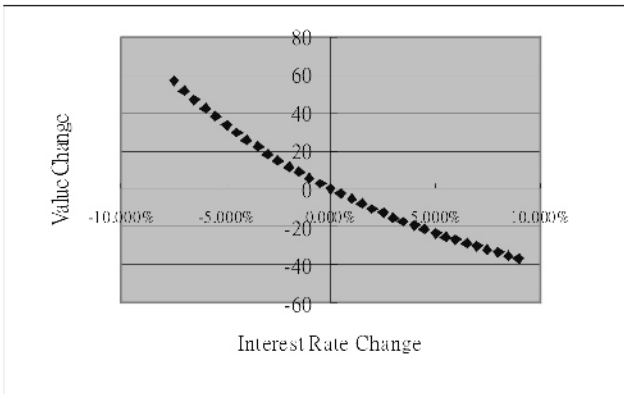
	Short Term + Future Duration Hedge	Long Term Future Duration Hedge	GV Hedge	Duration Convexity Hedge
3年期現貨債 Price Change		-2.5	-2.47	-2.47
6年期現貨公債 Price Change		-5.3	-5.46	-5.46
10年期現貨公債 Price Change		-8.01	-8.01	-8.01
30天利率期貨 Price Change		$S+0.25 \times 1.32 = 0.33$	-0.1775	-0.10575
10年期利率期貨 Price Change		$S+10.296$	+12.168	+9.828
Net Price Change	-	-	-	-

資料來源：本研究整理

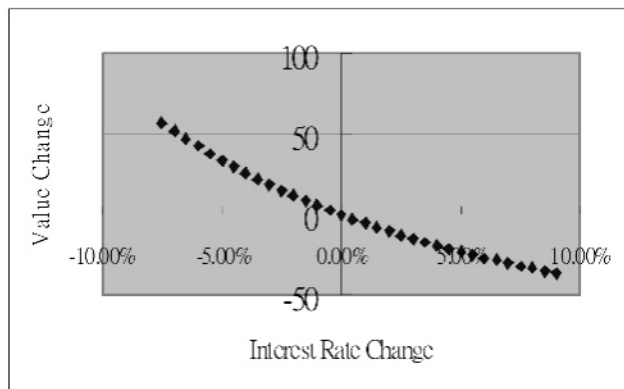
利用殖利率曲線的水平利率與曲度的計量模型，吾人可探討殖利率變動中水平、利率、曲度(波動性)三因素的解釋能力的大小，依文獻的研究水平的風險因素的變異成份最大，而斜率次之，曲度是最少。相對的價格變異成份中，利率期間的成份是比凸性的成份還大。因此避險者對殖利率的水平與斜率的不正常移動要多加留意利率期間的免疫效果，而當殖利率曲度或波動性明顯時，則要留意凸性的免疫效果。



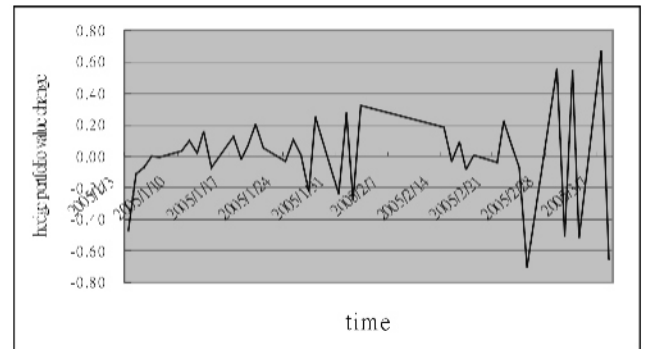
圖[6] Duration Hedge Value Change



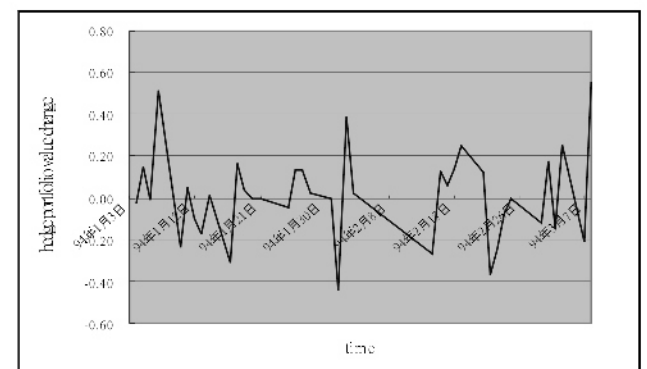
圖[7] GV Hedge Value Change



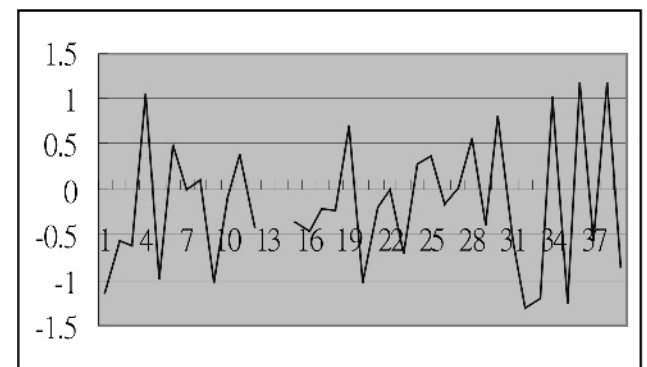
圖[8] Convexity Duration Hedge Value Change



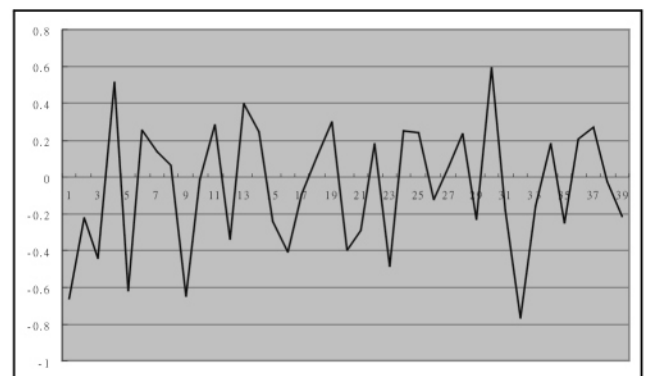
圖[9] 無避險下的投資組合價值變動



圖[10] 存續期間法避險組合價值變動(避險價值是負的)



圖[11] GV Hedge法避險組合價值變動



圖[12] 存續期間與凸性法避險組合價值變動圖

## 五、風險模擬情境與風險值分析

Barrett, Gosnell, and Heuson使用Nelson and Siegel (1987)年提供的殖利率模型的方法，將殖利率波動的成份分為，水平、斜率與曲度，來說明債券投資組合的避險風險，其提供了二個殖利率曲線變動的風險模擬案子，第一案是模擬殖利率模型(yield curve- YC)中三因素的變動由YC(8.30%, -4.42, -1.46, 3) to YC(8.70%, 59, 2.50, 3)而第二案是模擬YC(9.71%, 1.15, 3.9, 3) to YC(7.7%, 5.06, -1.45, 3)，接著再來探討各避險模型的避險比率的變動、避險效果的差異、以及避險誤差的來源。

風險值的分析是求算投資標的，如現貨利率、短、中、長期期貨契約的風險值大小，以及其變異共變異或相關性並進而計算避險組合的風險值。相同的，也可求算前述三風險因素的利率期間所構成的風險值與相關性，期許給避險者各不同風險成份與相關性的認知。

## 伍、結論及後續研究建議

### 一、利用公債期貨規避持有債券部位的價格風險

即利用期貨保護現貨部位時，依據避險者進場時所持有的現貨部位分為多頭避險(long hedge)以及空頭避險(short hedge)，為規避殖利率下跌成本上揚，應從事多頭避險買入利率期貨，反之，為避免殖利率上揚造成價格下跌損失，應從事空頭避險賣出利率期貨。

### 二、現貨市場與期貨市場進行套利

套利機會的存在是由某一債券現貨價格推出該債券的遠期價格，再進一步推出該債券的對應理論期貨價格，並與期貨市場出現的價格互相比較，若兩者不等時則現貨市場與期貨市場出現套利機會，可透過買進價格較低者，賣出價格較高者，獲取無風險利潤，此即無風險套利策略。

### 三、用期貨市場進行策略性交易

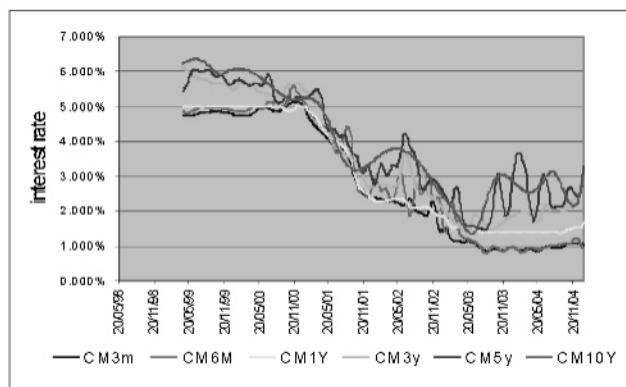
維持投資組合存續期間不變，改變投資組合的凸性。擁有同樣存續期間的投資組合，若其凸性不同，其因債券殖利率變化而造成價格波動亦會不同，凸性越大的投資組合，因債券殖利率下降所造成的價格變動幅度較大，但債券殖利率上揚時其價格下跌較少。

### 四、利用公債期貨鎖定發行成本

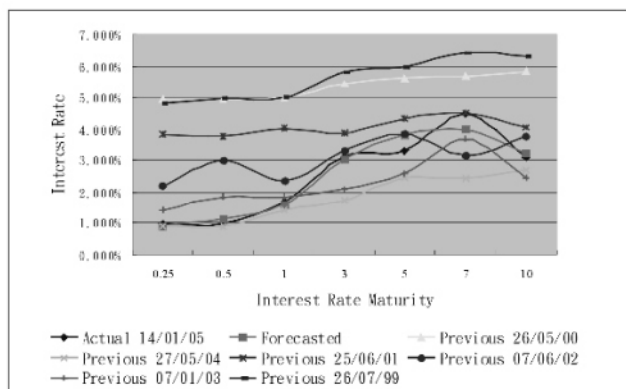
債券承銷商面臨持有利率資產的價格風險，債券發行者則面臨持有利率負債的價格風險，因此可採用方式相同而方向相反的避險操作，承銷商可利用空頭避險方式，以規避利率上漲時的資產價值下跌，發行者可採用多頭避險方式，以規避利率下跌時的負債成本上升。

## 五、合成利率證券及改變利率工具之特性

利率期貨的多空部位可以用來創造具有某一特定現金流量的合成證券及改變原來利率工具之特性，如把既定組合的到期日改變，或把浮動利率變成固定利率。



圖[13]台灣政府公債利率走勢圖 (資料來源: AREMOS)



圖[14] 台灣政府公債殖利率變動圖-以水平、利率、曲線為殖利率預測模型

## 附錄一 期貨的利率期間

期貨契約的利率期間( $D_F$ )是由 Clarke (1992)所提出其計算公式如下：

$$D_F = \frac{(P_{CTD} + A_{CTD}) * D_{CTD}}{C_{CTD} * F}$$

式中

$P_{CTD}$ 是最便宜可交割債券的清算(clear)價格

$A_{CTD}$ 是最便宜可交割債券的應計利息

$F$ 是公債期貨契約價格

$C_{CTD}$ 是最便宜可交割債券的轉換因子

$D_{CTD}$ 是最便宜可交割債券的存期間

## 參考文獻

## 中文部份

- 1 楊孟波(2002)，利率期限結構變動下之債券投資組合免疫策略，國立高雄第一科技大學財務管理研究所碩士論文
- 2 廖源龍(2002)，我國票券利率期貨之研究，國立台灣大學財務金融研究所碩士論文
- 3 蘇雅芬(2003)，台灣商業本票及美國國庫券利率期貨之動態避險分析，國立中正大學企業管理研究所碩士論文
- 4 李文孝(2003)，台灣公債避險實證，國立政治大學金融研究所碩士論文
- 5 吳秉宗(2003)，以FIGARCH模型估計長期利率期貨風險值，國立政治大學國際貿易研究所碩士論文
- 6 賈松濤(2002)，固定收益衍生性金融商品在資產負債管理上的應用，國立台灣大學財務金融研究所碩士論文
- 7 魏志良(2001)，國際股價指數期貨與現貨直接避險策略之研究，私立淡江大學財務金融碩士論文
- 8 林靖文(2000)，最適公債期貨避險策略之實證研究，國立高雄第一科技大學財務管理研究所碩士論文
- 9 羅月璟(1999)，利率期貨最適避險比率與績效之研究-以美國國庫券為例，國立中正大學企業管理研究所碩士論文
- 10 汪明瑜(1999)，台灣短期利率期貨之研究，國立台灣大學財務金融研究所碩士論文
- 11 黃文俊(1997)，利率風險管理免疫策略之應用-期貨契約存續期間分析與研究，私立淡江大學財務金融研究所碩士論文
- 12 吳逸豪(1997)，債券價格之N階泰勒展開式的免疫效果，國立台灣大學財務研究所碩士論文
- 13 夏青佑(1996)，殖利率曲線非平行移動之避險策略研究與相關意避險策略研討，國立台灣大學財務金融研究所碩士論文
- 14 賴曉璐(1996)，政府公債殖利率曲線形狀與免疫策略的選擇，國立台灣大學財務金融研究所碩士論文
- 15 陳治國(1994)，最適避險比例之估計-條件異質變異數模式之應用，私立輔仁大學經濟學研究所碩士論文
- 16 龐元愷(1992)，利率期貨避險策略之研究，國立台灣大學商學研究所碩士論文
- 17 謝春惠(1992)，利率期貨避險效果之實證研究，私立中國文化大學企業管理研究所碩士論文
- 18 譚丹琪(1992)，利率期貨規避利率風險之研究，國立台灣大學商學研究所碩士論文
- 19 林聰欽(1994)，風險貼水及交易成本對債券殖利率影響之實證研究，國立政治大學國際貿易所碩士論文
- 20 鐘翠芬(1993)，國外利率期貨交叉避險之研究，國立台灣大學國際貿易所碩士論文
- 21 羅際禎(1991)，債券期貨規避利率風險之研究-中長期公債實證，國立政治大學企業管理研究所碩士論文
- 22 丁子雲(1990)，台灣公債投資組合的利率風險免疫策略研究，國立中央大學財務管理研究所碩士論文

參考文獻

英文部份

- [1]Barrett, W.B., T.F. Gosnell, Jr., and A.J. Heuson, (1995). "Yield curve shifts and the selection of immunization strategies." *Journal of Fixed Income* 5, 53-64.
- [2]Bierwag, G.O., (1987). *Duration Analysis: Managing Interest Rate Risk*, (Ballinger Press, New York).
- [3]Bierwag, G.O. and G.G. Kaufman, (1977). "Immunization, duration and term structure of interest rates." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 12, 725-742.
- [4]Bierwag, G.O., G.G. Kaufman, and C.M. Latta, (1987). "Bond portfolio immunization: tests of maturity, one- and two-factor duration matching strategies." *Financial Review* 22, 203-220.
- [5]Chambers, D.R., (1984). "An immunization strategy for futures contracts on government securities." *The Journal of Futures Markets* 4, 173-188.
- [6]Clarke, Roger G., (1992). *Options and Futures: A Tutorial*. Charlottesville: The Research Foundation of the Institute of Chartered Financial Analysts.
- [7]Daigler, Robert T. (1998), "A Futures Duration-Convexity Hedging Method," *The Financial Review* 33, 61-80.
- [8]Gay, G.D. and R.W. Kolb, (1983). "The management of interest rate risk." *The Journal of Portfolio Management* 9, 65-70.
- [9]Gay, G., R. Kolb and Raymond Chiang, (1983). "Interest rate hedging: an empirical test of alternative strategies." *Journal of Financial Research* 6, 187-197.
- [10]Goodman, L. and N.R. Vijayaraghavan, (1989). "Combining various futures contracts to get better hedges." *Advances in Futures and Options Research* 3, 257-268.
- [11]Goodman, L. and N.R. Vijayaraghavan, (1987). "Generalized duration hedging with futures contracts." *The Review of Futures Markets* 6/1, 94-108.
- [12] Jones, F.(1991 Sept.). "Yield Curve Strategies," *Journal of Fixed Income*, pp. 43-48.
- [13]Kolb, R. and R. Chiang, (1982). "Duration, immunization, and hedging with interest rate futures." *Journal of Financial Research* 5, 161-170.
- [14]Kolb, R. and R. Chiang, (1981). "Improving hedging performance using interest rate futures." *Financial Management* 10, 72-79.
- [15]Lee, S.B. and S.H. Oh, (1993). "Managing non-parallel shift risk of yield curve with interest rate futures." *The Journal of Futures Markets* 13, 515-526.
- [16]McCulloch, J. Huston.(1975). "The Tax-Adjusted Yield Curve," *Journal of Finance* 30: 811-830.
- [17]Nelson, C.R. and A.F. Siegel, (1987). "Parsimonious modeling of yield curves." *Journal of Business* 60, 473-490.
- [18]RiskMetrics™, (1995). *Technical Document*, 3<sup>rd</sup> ed., J.P. Morgan.
- [19]Reitano, R.R., (1990). "Non-parallel yield curve shifts and durational leverage." *Journal of Portfolio Management* 16, 62-67.
- [20]Reitano, R.R., (1992). "Non-parallel yield curve shifts and immunization." *Journal of Portfolio Management* 18, 36-43.
- [21]Vasicek, O. and Fong, G., (1982). "Term Structure Modeling Using Exponential," *Journal of Finance* 37.
- [22]Willner, R., (1996). "A new tool for portfolio managers: level, slope, and curvature durations." *Journal of Fixed Income* 6, 48-59.