

CBOE新編VIX指數於台指選擇權 及實現波動度預測上之應用

◆元大京華期貨公司

●范懷文●高子劍●柯政宏

摘要

波動度的變化是金融資產的風險來源之一，對於衍生性金融商品的定價、避險、交易策略擬定以及風險控管，扮演一個相當重要的角色。芝加哥選擇權交易所(CBOE)於1993年推出由S&P100選擇權隱含波動度計算之波動度指數(VIX Index)，因其標準化的特性而廣為市場所接受。然隨著財務理論的發展及為了更貼近市場，CBOE於2003年9月以Volatility & Variance swaps的觀念，重新編制以S&P500選擇權為標的之VIX指數。而後更進一步成立期貨交易所(CFE)，於2004年3月26日推出第一個波動度期貨商品(VIX futures)，於2004年5月18日推出第二個波動度相關期貨商品(Variance futures)。

國內已於2001年12月推出台指選擇權，市場規模正逐步擴大之中，然至目前尚無廣為接受的波動度指標，本文以CBOE新編制VIX指數之公式應用臺指選擇權市場，同時與歷史波動度、隱含波動度、GARCH模型比較對台指期貨未來真實波動度之預測能力。此外，再加入交易量为解釋變數，以及使用日內資料為樣本，檢視是否能提高對真實波動度的預測績效。最後並檢測應用於台指選擇權之VIX指數與台指期貨之關係。所得結論如下：

1. 在市場不成熟的階段，隱含波動度模型與VIX模型可能因交易量偏低，導致不合理之價格跳動，而無法獲得有效之預測能力。
2. 於交易量穩定之市場成熟期，各種波動度模型之預測績效均大幅提升。預測績效最佳的是VIX指數，VIX指數是以所有價外合約之買、賣權計算，更能反應整體選擇權市場對於真實波動度的預期。
3. 就平均絕對誤差(MAE)與均方根誤差(RMSE)來看，在交易量較低之時期，雖然歷史波動度模型之預測能力較好，但是以隱含波動度模型之預估值與真實波動度的誤差較小。而交易量較高且穩定成長之時期，則是VIX模型誤差最小，且隨著交易量的增加，各模型之誤差皆亦有縮小之現象。
4. 加入期貨交易量为解釋變數後，僅在市場不成熟階段能提高預測能力，於市場成熟期則無有效提升模型的解釋能力。在改以選擇權交易量为新增解釋變數的話，於市場成熟期則可以小幅提升預測模型之解釋能力。

壹、研究目的

芝加哥選擇權交易所(CBOE)於1993年推出VIX指數(即波動度指數，Volatility Index)，其計算基礎是根據著名的Black-Scholes(1973)與Merton(1973)所提出的選擇權評價模型，不過由於S&P100指數選擇權為美式選擇權，為了反應指數成份股有發放現金股息的情形，實務上則是利用Cox, Ross & Rubinstein(1979)推導經現金股息調整後的二項式模型(CRR)計算所得之波動度指數，用以表達選擇權交易人對未來股票市場波動度的預期，當指數越高時，顯示交易人預期未來股價指數的波動度越劇烈，反應出投資人不安的心理層面；當VIX指數越低時，代表投資人認為未來的股價波動將趨於緩和。由於該指數可反應投資人對未來股價波動的預期性，且可以依此指數觀察參與者心理層面的表現，故又稱為「投資人情緒指標(The investor fear gauge)」。在歷經十年獲市場認同之後，於2003年9月22日CBOE重新以volatility and variance swaps的觀念以S&P500指數為標的計算VIX指數，以更貼近市場狀況。而後進一步成立期貨交易所，於2004年3月26日推出第一個波動度期貨Volatility Index Futures，即VIX Futures，契約規格如附錄三，更於2004年5月18日推出第二個將波動度商品化的期貨，即變異數期貨(Variance Futures)，契約規格如附錄四，標的為三個月期之S&P500指數之真實變異數(Realized Variance)。未來更計劃進一步推出VIX指數選擇權，將波動度指數進一步商品化為選擇權。

由於波動度在選擇權市場已受到極高的重視，市場若能準確預估波動度的變化，在選擇權的投機及避險交易上將有極大的幫助；而且能規避投資組合因波動度變動而產生之風險，以及作為投資策略擬定的參考。故波動度模型預測真實波動度能力的優劣是本文欲探討的課題，因此本文研究將以台指選擇權為對象進行實證分析。

一、分別利用歷史波動度、隱含波動度模型、GARCH(1,1)模型及CBOE新編制之VIX指數公式估計波動度，與未來不同期間之真實波動度進行預測能力之比較。迴歸分析是以不同波動度模型計算當期之波動度預測下一期真實波動度，比較不同波動度模型預測能力之優劣。並以平均絕對誤差(MAE)與均方根誤差(RMSE)檢定各種波動度預測模型與真實波動度之間的誤差。

二、台指選擇權市場自2001年12月上市以來，從上市當初的日均量不到千口，到93年四月止的日均量已達20萬口以上，市場交投趨於熱絡且成長相當快速，本文將波動度的預測加入交易量變數，觀察不同模型之波動度估計值是否具有更好的預測品質。

貳、文獻探討

一、波動度之相關文獻

在 Black-Scholes 選擇權訂價模型中，唯一未知需要以估計參數是波動度，由於無法直接觀察到該數值，它的估計方法在選擇權訂價上就顯得格外重要，Black-Scholes (1973) 指出若投資人具有比市場更精確的波動度預測，那將可享有超額報酬。一般有兩個方法來估計此參數，一是以標的指數的歷史波動度當作估計式，另一是以選擇權的市場價格反推求得之隱含波動度。

Mandelbrot (1963) 認為股價的分配呈高狹峰且肥尾的型態，而且股價變動並非獨立。Mandelbrot (1963) 觀察到股市報酬的變化具有前後相關的現象，雖然價格的變動與報酬率隨時間的經過並無直接相關，但價格變化與報酬率並非獨立，如果當期股價相對較大時，往後的期間也會有較大的波動，但變化的方向則不一定，反之亦然，此即為波動度群聚現象 (clustering)。

而歷史波動是以過去期間所呈現的波動，一般以標的指數的報酬率的標準差來衡量，也就是說是以過去觀察的變數值來衡量。距目前較近的觀察值，常理上對波動度的影響應較大，但是歷史波動度給予每一觀察值同樣的權數，故歷史波動度的群聚特性並非很好；另外歷史波動度的觀察期的長短也會影響到數值的變化，若所取的期間較長，則波動度的群聚效應將不明顯，但觀察期間過短，雖然有較好的群聚效應，但是正確性則受到質疑。而單以過去資料來預期未來波動，未將市場目前預期考量在內，是否能有較佳的預測能力這點亦是需探討的重點。

而隱含波動度是市場上觀察到的選擇權價格反推求得之波動度，若市場具效率性，則價格已充分反應標的指數的所有資訊時，且評價模型正確，則所求出之隱含波動度則是代表市場對於選擇權到期前的存續期間的預期波動，且是為良好的預測指標。Latane & Rendleman (1976)、Chiras & Manaster (1978) 發現隱含波動度是未來價格波動度的良好預測方法；Fleming (1998) 發現在波動度的預測上，隱含波動度會優於歷史波動度。

但是，亦有學者提出相反的看法，如 Day & Lewis (1992) 及 Lamoureux & Lastrapes (1993) 皆發現隱含波動度在預測能力上能提供有用的資訊，但是時間序列模型卻可以提供比隱含波動度更多的資訊。Canina & Figlewski (1993) 檢驗 S&P100 指數選擇權市場，實證發現隱含波動度與真實的波動無顯著相關，也不具預測能力。

此外，Fleming (1998) 使用 S&P100 指數選擇權的隱含波動度研究隱含波動度是否為股票市場波動的不偏估計式，實證顯示隱含波動度是一個有偏誤的估計式，而且有高估未來波動度的現象；Engle (1982) 發展出自我迴歸條件異質變異數 (Autoregressive

Conditional Heteroscedasticity, ARCH) 模型，此模型定義條件誤差項的分配為常態分配，而條件變異數與過去的誤差項平方成線性關係。若當期出現極端值，則將影響以後期間的條件變異數，但此極端值不能作為預測的單一指標。Engle 依其所發展的 ARCH 模型來估計英國通貨膨脹率的平均數與變異數，結果發現 ARCH 模型可以改善最小平方方法的預測績效，同時可獲得更準確的變異數預測值。

而 Bollerslev (1986) 提出一般化自我迴歸條件異質變異數 (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, GARCH) 模型，將過去的條件變異數加入 ARCH 模型之中而予以一般化，使條件變異數的遞延結構更為合理，同時以英國的通貨膨脹率為實證對象，發現以 GARCH (1,1) 的模型所配置的效果優於 ARCH 模型。

二、波動度指標之相關研究

波動度指標之研究最早是由 Whaley (1993) 提出，以 S&P 100 指數選擇權為例說明波動度指標之建構方式與避險應用，其指出 VIX 指數與 S&P 100 指數呈負相關；並模擬波動度指標之衍生性商品之避險效果，說明波動度指標可在不影響其他風險參數的情況下，有效規避投資組合的 vega 風險。該篇文章早在 1993 年即提出，在歷經十年之後，於 2003 年 10 月芝加哥選擇權交易所重新編制，並於 2004 年 3 月推出以 VIX 指數為標的之期貨並計劃再進一步推出 VIX 指數選擇權。

Fleming、Ostdiek & Whaley (1995) 指出以日資料與週資料顯示 VIX 指數有些微的一階自我相關現象，同時發現 VIX 指數並無明顯 intraweek 效應。而 VIX 指數與 S&P 100 指數報酬呈現高度負相關且有不對稱的關係，即 VIX 指數在 S&P 100 指數下跌時的變化量大於 S&P 100 指數上漲時的變化量，且 VIX 指數為 S&P 100 指數未來實際波動度的良好預估值。

三、模型預測能力之比較

Day 與 Lewis (1993) 比較原油期貨選擇權的隱含波動度、歷史波動度與 GARCH 及 EGARCH 模型的預測能力，結果發現隱含波動度的預測能力最好。Lamoureux 與 Lastrapes (1993) 研究發現隱含波動度在預測未來波動度時，並沒充分聚集所有資訊，即模型所包含的資訊皆可由歷史資料來解釋。Canina 與 Figlewski (1993) 以 S&P100 指數選擇權為樣本來探討隱含波動度的資訊內涵，結果發現隱含波動度是一個沒有效率且偏誤的預測值，即無法聚集歷史波動度所包含的訊息，而且隱含波動度幾乎與真實波動度無關。

Jorion (1995) 針對外匯期貨選擇權的隱含波動度進行分析，結果發現隱含波動度不論是在預測能力或

資訊含量的多寡，皆優於歷史資料的時間數列模型。Fleming (1998) 研究結果認為隱含波動度的預測能力優於歷史波動度，但不偏性的檢定結果指出：隱含波動度是一個顯著高估真實波動度的偏誤預測值，這與 Jorion (1995) 所得到的結論一致。

Christensen & Prabhala (1998) 檢驗 S&P100 指數選擇權隱含波動度與真實波動度之間的關係，實證結果發現隱含波動度具預測能力，且包含歷史波動之預測資訊。而對於 Canina 與 Figlewski (1993) 的實證結果 Christensen & Prabhala 認為可能的原因是選擇權市場對於波動度資訊的處理反應是沒有效率的，另外由於交易成本高，所以 Black-Scholes 模型不適用。而其使用較長的樣本期間，並調整資料的觀察頻率，使樣本資料沒有重疊性(overlapping data)的問題，而使隱含波動度對於真實波動度的預測有較低的偏誤。

四、波動度與交易量

Epps(1975) 提出混合分配假說 (Mixture of Distributions Hypothesis, MDH)，認為交易量與波動度之間存在正向關係，雖然無法明確說兩者之間領先落後關係，但是當較大的交易量產生時，同時也有較大的波動度產生。

Lamoureux 與 Lasterapes (1990) 指出如果在條件變異數方程式中加入同期的交易量，則波動度的持續性將變得較不明顯。Kawaller、Koch & Peterson (1994) 使用日內資料檢驗隱含波動度與歷史波動度之間的領先落後關係，實證發現隱含波動度未曾領先歷史波動度，但交易量與歷史波動度之間則存在著強烈關聯性，而交易量與隱含波動度之間的關係則不穩定。

Chang, Chou 及 Nelling 探討波動度對避險及投機交易在 S&P500 期貨契約交易需求之影響。使用資料期間為 1993 年 1 月至 2000 年 12 月；其波動度的衡量依然採用 Chang 所使用的方法；最後探討風險溢酬對避險及投機交易需求之影響。所使用三種波動度估計模型為：1. 隱含波動度：是使用 S&P500 指數期貨選擇權去計算，用的是 Black (1976) 期貨選擇權的定價模式，以最接近價平的各兩個買權及賣權。2. 條件波動度：以 GARCH 模型來估計其波動度，每日 S&P500 股價指數期貨報酬率的序列是一個 AMRA(p,q)-GARCH(1,1) 的模型。3. CBOE 的波動度：本文所使用的是 CBOE 的 VIX 模型所計算出的波動度，當成第三種波動度。最後所得結論為：不論是避險者或投機者，波動度與未平倉合約數成正相關。投機者在波動度比較高的時候，會增加其空頭部位，但避險者則不會如此，所以期貨的風險溢酬，僅對投機者較有影響。

參、研究方法

一、波動度的估計

本文的實證研究係使用歷史波動度模型、GARCH (1,1) 模型、隱含波動度模型、VIX 指數模型所計算之當期之波動度，來預測下一期之真實波動度，各模型分述如下。

(一)、真實波動度 (Realized Volatility)

真實波動度可由當日往後取固定之一段期間，計算該期間標的之標準差，如圖 1 說明，並予以年化的方式來表達，故以日資料計算之波動度必須再以時間的平方根年化。

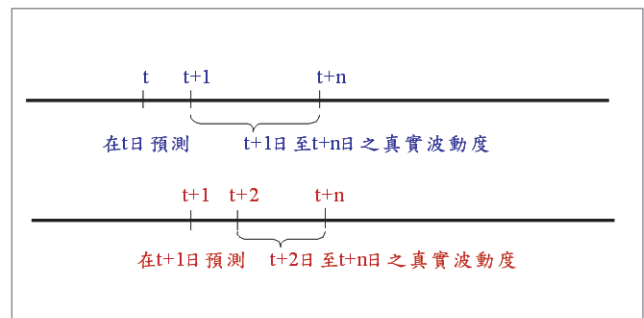


圖1 未來固定期間真實波動度之預測期間

另一方式則是 Gwilym 及 Buckle (1999) 之方法，而 Szakmary、Ors、Kim、Davidson (2002) 四位學者亦採相同之模式，從計算當日往後取至選擇權到期日為止期間來計算標的指數之標準差。如圖 3-2 說明，第 $t+n$ 日為選擇權之到期日。

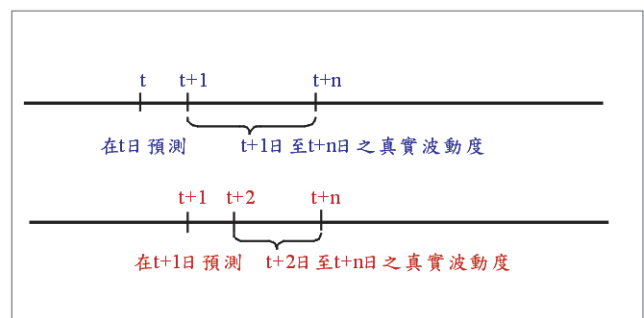


圖2 至選擇權到期日為止之真實波動度預測期間

雖然較符合選擇權每月結算的原則，但採此方法所面臨的問題是選擇權與期貨合約在市場的存續月份未必完全相同，在計算隱含波動度、VIX 指數及真實波動度時，將會造成選擇權與期貨合約距最近月份到期的時間長度不一致的情形，例如 S&P500 選擇權合約，每一個月份均為存續月份，但是 S&P500 期貨的存續月份則為三月、六月、九月、十二月。在該情況下，將產生兩個問題，第一點是選擇權與期貨合約距

最近月份之到期日會發生不一致的情形，第二點是若隨時間經過越接近到期日的情況下，選擇權合約將產生樣本數目過少的問題，造成波動度之計算出現過大或過小的變化，且在到期換月的時間點上，因為樣本期間會由一個交易日放大至三個月，亦會出現同樣的現象。

就第一點的解決方法是以最接近期貨合約到期日之選擇權合約為之選取月份，則可讓選擇權與期貨距到期時間一致，另外也能與計算真實波動度維持相同的取樣時間。而因為取樣時間較長，第二點換月時間點的選擇則可定為到期前10日以解決，以避免距到期時間過短，樣本過少而造成預測上的誤差。事實上Szakmary、Ors、Kim、Davidson (2002) 四位學者的研究也指出到期前5日至前15日換月並無太大的差異。該方法解決了S&P500期貨與選擇權最近合約月份不一致的問題。

但是若最套用於台指選擇權與台指期貨則未必合適。台指選擇權與台指期貨到期日相同，不會有距到期時間不同的情形，但是因每個月均會到期，每一個期貨或選擇權成為最近月份合約的時間點將只有20個交易日左右。以上述方法計算波動度在接近到期時，將會產生樣本不足的問題而使波動度的預測出現誤差，本文將同時比較此兩種方式。

$$\sigma_t^n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n (r_{t+i} - \bar{r})^2} \times \sqrt{250}$$

σ_t^n ：第t期至未來n日之真實波動度

n：本文分別取5日、10日、20日、30日

r_i ：n日內每天之報酬率

\bar{r} ：n日內報酬之平均數

若採用Gwilym及Buckle (1999) 之方法，則n = 距期日天數

(二)、歷史波動度 (Historical volatility)

歷史波動度是取固定一段期間股價報酬率之標準差來估計，再予以時間之平方根年化，所面臨的是取樣天數的問題，若取樣時間過長，包含過去太多資料，則對未來真實波動度之預測效果不大，本文則是依Gemmil (1986) 及Chrias and Manaster (1978) 所取之期數以20日為估計期。

$$\sigma_t^{HV} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2} \times \sqrt{250}$$

σ_t^{HV} ：過去n日之歷史波動度

r_i ：n日內每天之報酬率

\bar{r} ：n日內報酬之平均數

(三)、隱含波動度模型 (Implied volatility)

Black-Scholes的選擇權定價模型中，所有需使用到的參數為波動度、履約價、無風險利率、距到期時間長度，而除了波動度之外，都可以從市場觀察到，而波動度則必須對標的資產予以估計。而當選擇權市場是效率且評價正確，則可將選擇權之價格代入Black-Scholes選擇權定價模型中，就可以反推求出滿足目前市場價格所預期之未來波動度。隱含波動度是透過市場投資者之評估，而反應於選擇權價格，隱含市場對未來波動度的預期。而Fleming (1998) 研究指出在估計隱含波動度時，可能會有兩個問題產生，1.模型設定誤差(specification error)，因選擇權的市價與使用的評價模型不一致。2.衡量誤差(measurement error)，因買、賣價差的存在及交易量偏低而使得選擇權過度偏離其理論價格。事實上，以國內選擇權市場而言，在剛出市場的第一年，因流動性不足的影響下，導致選擇權價格出現不連續之情形，而影響到對真實波動度預測能力，故本文將同時比較國內選擇權市場不同交易量水準下隱含波動度的表現。

Harvey與Whaley (1991) 亦指出會影響到估計準確度的問題，1.須選擇最接近價平且距到期日最短之合約，如此較能反應出隱含波動度模型所包含的訊息；2.指數選擇權與其標的指數可能有交易時間非同步之問題；3.買、賣價差的影響；4.股價指數中之成份股可能因交易量偏低，而無法反應出與標的指數應有的連動關係。

就第一點而言，亦有其他文獻支持採用價平選擇權來估計隱含波動度，如Gemmil (1986)、Jorion (1995)、Claessen and Mitnik (2002)。而本文亦採用最近期貨價格之上下兩檔買權及賣權來估算波動度。就第二點而言，本文以期貨價格替代標的指數，兩者之交易時間相同。而買、賣價差過大的問題的確在樣本初期產生，不過在2003年下半年交易量的提升後，該現象已有改善。而第四點問題則可能無法避免。但若期貨指數替代標的現貨指數，則剩下的問題則期貨價格能否代表現貨價格，目前國內選擇權市場，包括造市者及投機者，在以台指期貨為避險管道的考量下，選擇權價格是隨期貨價格而波動。Black-Scholes的選擇權定價模型可表示成如下：

$$C = SN(d_1) - Ke^{-r\tau} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \tau(r + \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

C：為買權價格

S：標的指數價格

K：買權之履約價格

r：無風險利率

σ ：波動度

τ ：距到期日之時間長度

(四)、GARCH (1,1) 模型

本文是採用 Bollerslev(1986) 提出一般化自我迴歸條件異質變異數模型 (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, GARCH), 將過去的條件變異數加入ARCH模型之中而予以一般化, 使條件變異數的遞延結構更為合理。而一個GARCH(p,q) 模型其結構表示如下

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t)$$

$$\varepsilon_t = y_t - x_t \beta_t$$

$$\sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}$$

$$\alpha_0 > 0$$

$$\alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, q$$

$$\beta_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, p$$

$$p \geq 0, q \geq 0$$

而Bollerslev(1986)同時以英國的通貨膨脹率為實證對象, 發現以 GARCH (1,1) 的模型所配置的效果優於ARCH 模型。故本文亦以是 GARCH (1,1) 模型估計波動度。其模型結構表示如下:

$$\tilde{R} = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t)$$

$$\sigma_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

$$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$$

(五)、CBOE編制之VIX波動度指數說明

1. CBOE舊有VIX指數(VXO)之編制

CBOE在2003年9月22日推出新編之VIX波動度指數, 原有之編制方法仍然持續公佈, 但為新、舊制VIX指數之區隔, 將舊有之VIX指數更名為VXO指數。

1993年Whaley提出市場波動度指數(舊有之VIX指數)之編制方法, 其計算觀念是由Black-Scholes的選擇權定價模型而來, 將所需使用到的參數如股價指數水準、波動度、履約價、無風險利率、距到期時間長度代入Black-Scholes選擇權定價模型, 可以得到選擇權之理論價格, 而將選擇權市場價格代入Black-Scholes選擇權定價模型中, 就可以反推求出滿

足目前市場價格所預期之波動度, 即隱含波動度。但是S&P100指數選擇權為美式選擇權, 且考量指數成份股有配放現金股利之情形, 實務上是使用Cox, Ross & Rubinstein (1979)所提出現金股利調整之二項式模型作為計算基礎。

在推算S&P100指數選擇權各履約價之隱含波動度所需使用的參數在指數水準是S&P100股價指數; 無風險利率是以到期日最接近選擇權到期之國庫券(T-bill)殖利率, 若選擇權到期日小於30日, 無風險利率則以存續期間30日的國庫券取代; 另外在選擇權的採樣方面, 因S&P100選擇權之波動度在接近到期時, 易出現較大的波動, 因此CBOE在計算VXO時, 排除距到期小於8日的選擇權; 而選擇權價格之選取是以買、賣報價之中間值為選擇權之市價; 距到期時間則是以交易日而非日曆天為計算基礎; 選擇權履約價的選擇則是取四個近月合約之買、賣權以及次近月合約之買、賣權, 共計八個選擇權合約以加權平均方式反推出VXO指數, 詳細介紹如附錄一。

VXO指數之編制是由CBOE之S&P100指數選擇權反推而來, 若應用台指選擇權市場則有許多設計方式仍需修改, 例如: 現金股利的配發不易估算、選擇權剩餘期間過短之排除、價平履約價的選取、台指選擇權次近月合約流動性不足, 易使選擇權價格出現偏離理論價過大之情形。在經修正後, 本文隱含波動度模型是取近月合約最接近指數價格上、下各一檔買權以及賣權, 共計四檔選擇權合約作為計算基礎, 模型之設計已經接近CBOE之VXO指數之編制。

2. CBOE舊有VIX指數(VXO)之編制

VIX指標為芝加哥選擇權交易(CBOE)所自1993年起公佈的波動度指數, 一直是市場採取作為選擇權隱含波動度的重要參考。2003年9月22日, CBOE公佈新的計算方法, 其基準原為S&P100選擇權, 但有超過8000億美元的資產與S&P500指數連動, 且S&P500選擇權的交易規模也超越S&P100選擇權, 新VIX指數的計算基準亦改為S&P500選擇權。另外, CBOE以variance & volatility swaps之方式更新計算公式, 原指標只包含價平附近的選擇權合約, 新指標則加權平均計算所有價外的買權及賣權, 較原指標更貼近整體市場動態, 其公式如下, 詳細推導則如附錄二。

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2$$

$VIX = \sigma \times 100$

T：距到期時間(分)

F：遠期指數水準

K_i ：第i個價外選擇權的履約價

$$\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$$

K_0 ：低於遠期指數水準的第一個履約價

R：無風險利率

$Q(K_i)$ ：履約價 K_i 契約的買賣價中間值

上述F的算法需先計算出同履約價(Strike Price)的買權價格(Call Price)和賣權價格(Put Price)，其差價最小者，再帶入下式：

$$F = \text{Strike Price} + e^{RT} \times (\text{Call Price} - \text{Put Price})$$

新指標仍保持大盤遭受重大利空衝擊時，波動度走揚的趨勢。另外，新舊VIX指標的走勢皆與大盤相反，以S&P500指標的報酬率為橫軸，VIX指標變動為縱軸，所迴歸出的趨勢線斜率恰為負值。即大盤上揚，VIX走跌；大盤下跌，VIX走揚。以此觀察，新舊VIX的表現非常一致。

經過以上比較，新VIX指標依舊包含原指標受重視的特性，並具有“投資人恐懼指標”的代表性。同時新VIX指標包含更廣泛的選擇權契約，亦是財金學者、市場交易員及風險管理者所著重的波動度參考依據。而在經CBOE將其商品化成期貨後，更可以提供市場一個規避波動度風險的金融交易工具。

二、波動度模型預測能力之比較

(一)、迴歸分析

本文將以迴歸模型來檢測波動度預測模型對於真實波動度解釋能力的優劣，並檢視迴歸係數 β_0 與 β_1 是否顯著異於0，若得到 β_1 顯著異於0的結果，則表所檢定的波動度預測模型對真實波動度具有預測能力。

而迴歸分析中之 R^2 則說明整個迴歸式之解釋能力， R^2 較高者則代表該模型對真實波動度擁有較優良的預測績效，所具有資訊內涵能夠解釋真實波動度。因此本文將以下列迴歸模型作進一步的研究與探討。

$$\sigma_t^n = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^j + \varepsilon_t$$

σ_t^n ：第t期至未來n日之真實波動度

σ_{t-1}^j ：前一期所預估之不同波動度預測模型
j 為 HV、GV、IV、VIX

(二)、平均絕對誤差(MAE)與均方根誤差(RMSE)檢定

為檢視預估波動度與實際波動度之誤差，本文以MAE與RMSE來衡量不同波動度模型之預估值偏離真實波動度之程度。

$$MAE = \frac{\sum_{t=1}^N |\sigma_{t-1}^j - \sigma_t^n|}{N}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^N (\sigma_{t-1}^j - \sigma_t^n)^2}{N}}$$

σ_t^n ：第t期至未來n日之真實波動度

σ_{t-1}^j ：前一期所預估之不同波動度預測模型
j 為 HV、GV、IV、VIX

(三)、加入交易量之迴歸模型

本文將以歷史波動度模型(HV)、GARCH模型、隱含波動度模型是取IV(call)及IV(put)之平均值IV為預測模型、VIX指數分別加入前一期之期貨交易量及前一期之選擇權交易量為解釋變數中，檢視交易量的變化是否會增加波動度的預測績效，迴歸分析模型如下：

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^j + \beta_2 \Delta vol_{t-1}^F + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^j + \beta_2 \Delta vol_{t-1}^{OP} + \varepsilon_t$$

σ_t ：為未來20日之真實波動度

σ_{t-1}^j ：為前一期波動度模型之預估值，
j 為 HV、GV、IV、VIX

vol_t^F ：第t期之期貨交易量

vol_t^{OP} ：第t期之選擇權交易量

$$\Delta vol_{t-1}^F = \ln(vol_{t-1}^F / vol_{t-2}^F)$$

：前一期之期貨交易量成長率

$$\Delta vol_{t-1}^{OP} = \ln(vol_{t-1}^{OP} / vol_{t-2}^{OP})$$

：前一期之選擇權交易量成長率

肆、實證分析

一、資料來源與選取

本文的實證研究係針對各種不同波動度模型之預測能力作比較，實證樣本為台灣期貨市場及台灣選擇權市場。分別利用歷史波動度模型、GARCH模型、隱含波動度模型及COBE新編VIX指數之公式，計算真實波動度之預估值，並分別比較各種模型預測能力之優劣。惟台灣衍生性商品市場與國外已逐步發展為成熟市場相較的話，國內的確起步較晚，但是本身股票現貨市場之高交易量與高週轉率，亦使得投資者產生避險需求。台指期貨於1998年7月推出，台指選擇權更遲至2001年12月方才推出，雖然起步較晚，但是在投機者的參與及市場避險需求高的情況下，市場交易量以相當快速的方式成長，故本文特以國內期貨及選擇權市場做為波動度模型預測能力比較之實證對象。對於實證研究所需之樣本及資料期間分述如下。

(一)、換月原則

台灣期貨交易所之台指期貨合約與台指選擇權合約均有最近當月份之制度，市場主要交易的合約亦為最近月份，但每月最近合約均有在當月到期的限制，在接近到期時，近月合約將逐漸減少，取而代之的是次近月合約，越接近到期，次近月合約之交易量亦有超過最近月合約之現象，故為配合市場主要交易合約為資料研究標的原則，在近月合約到期前三個交易日即將連續價格之月份選取轉次近月合約。

(二)、台灣加權指數期貨

本文所研究之期貨資料來源為台灣期貨交易所，因每月期貨合約均有到期日之限制，而非近月合約亦有交易量不足不具代表性之問題，本文所選取之期貨資料為近月合約之連續月份，依前述原則轉換月份，以每日收盤價為樣本資料，資料期間為2002年1月2日至2004年4月23日，共計571筆資料。日內資料則是取每檔之成交價格。

(三)、台指選擇權

資料來源為台灣經濟新報之台指選擇權分時資料庫，以日資料而言，隱含波動度模型所需之資料為每日之收盤價，而COBE新編之VIX指數除需要每日收盤價外，亦同時需要每日收盤時之第一最佳買價、第一最佳賣價。同時亦擷取每日之成交量、未平倉量，以做為加入前一期交易量估算波動度之資料，換月原則同樣為本節第一點之原則。全樣本資料期間為2002年1月2日至2004年4月23日，共計571個交易日。

(四)、無風險利率

無風險利率的選擇一般以銀行或郵匯局之定存利率，或者以商業本票次級市場利率，本文採後者為選取利率，並將取得之利率轉換成連續複利，以符合Black-Scholes模型，資料來源為台灣經濟新報資料庫。

(五)、樣本期間之劃分

隱含波動度模型及COBE新編之VIX指數均是以選擇權市場為基礎估算波動度，若是市場不具效率性將會影響到模型之預測能力。國內之台指選擇權是於2001年12月24日開始上市交易，雖然先前國內市場已有認購權證之發行交易，但是面對以加權指數為交易標的、每月均會到期、同時存在買、賣權合約、可擇權做為買方或者賣方之台指選擇權，市場熟悉度仍不夠，對交易制度，以及可運用策略認知不足的情況下，上市初期的交易量有明顯偏低的氣及，整個選擇權市場的運作並不具效率性，亦可能出現不合理的交易行為，而導致價格上過度偏差。而Gwilym and Buckle (1999) 指出，在接近到期的情況下，投資者所持有之部位將有到期結算的壓力，可能易出現較不合理的交易行為，而造成波動度的扭曲。因此，若是在市場交易量不足的情況下，更將會使買價、賣價之差距過大，成交價格亦會出現較大的跳動幅度，或是出現無風險之套利機會。

因此，本文將捨棄2001年12月份之交易資料，以2002年1月2日至2004年4月23日為全樣本期間。此外，如表1，在不同期間下交易量有明顯之不同，故再將全樣本進一步劃分成三個細樣本，以2002年全年為樣本一，2003年全年為樣本二，2004年1月2日至2004年4月23日為樣本三。其中在2002年樣本一之時段，其年度日均量僅6316口，成交量明顯不足，而當時之市況也的確出現買、賣價差過大，成交價格不夠連續之情形，以此時段資料預估真實波動度恐有失真之虞。而由2003年樣本二之資料可看出，年度日均量已達88039口，其中在2003年7月以後，每月日均量都達到10萬口以上之水準，整個市場快速成長，在價格的表現也呈現較為連續性的波動。而2004年1月至4月23日樣本三之成交量合計已達2003年全年交易量之70%以上，顯示整個市場之發展已越趨成熟，而至2004年4月23日之年度日均量也已達20萬口。故本文除以全樣本做波動度之預估外，再將樣本期間劃分三個時期，籍以比較低成交量與高成交量下對於真實波動度預測之準確性。

表 1：國內選擇權市場成交量比較表

樣本一			樣本二			樣本三		
月份	成交量	日均量	月份	成交量	日均量	月份	成交量	日均量
2002年 1 月	17,360	789	2003年 1 月	506,923	26,680	2004年 1 月	3,020,124	201,342
2002年 2 月	13,001	1,083	2003年 2 月	540,944	33,809	2004年 2 月	4,123,923	206,196
2002年 3 月	26,551	1,264	2003年 3 月	806,546	38,407	2004年 3 月	5,422,272	235,751
2002年 4 月	43,913	2,091	2003年 4 月	1,329,588	60,436	2004年 4 月	3,488,876	158,585
2002年 5 月	83,413	3,792	2003年 5 月	1,452,845	69,183			
2002年 6 月	89,626	4,481	2003年 6 月	1,842,912	92,146			
2002年 7 月	122,043	5,306	2003年 7 月	2,684,329	116,710			
2002年 8 月	114,459	5,203	2003年 8 月	2,274,926	108,330			
2002年 9 月	136,079	6,804	2003年 9 月	2,262,373	107,732			
2002年 10 月	236,866	10,767	2003年 10 月	2,804,292	127,468			
2002年 11 月	317,760	15,131	2003年 11 月	2,575,830	128,792			
2002年 12 月	365,375	16,608	2003年 12 月	2,840,308	123,492			
年度	合計	日均量	年度	合計	日均量	年度	合計	日均量
2002年	1,566,446	6,316	2003年	21,921,816	88,039	2004年	16,055,195	200,690

二、波動度模型預測能力之比較分析

本文係以歷史波動度模型、GARCH模型、隱含波動度模型及CBOE(芝加哥選擇權交易所)新編VIX指數之方法來預估台指期貨之真實波動度，以迴歸分析比較檢測各種預估模型預測能力之高低。並以MAE、RMSE評量不同模型之估計效果。而就真實波動度的計算方式，可從計算時點當日往後取某一期間來進行，本文以不同模型分別對未來不同交易日期間之真實波動度做預估，未來不同期間則分別取5日、10日、20日及30日。另外就前文所述，Gwilym and Buckle(1999)以計算時點當日至選擇權到期日為止的期間，來計算指數報酬之標準差作為真實波動度，本文亦以此作為預測標之一。

(一)、各種波動度之基本統計量

首先就真實波動度而言，如表2，未來不同期間之平均數約介於0.2475至0.2662之間，期間較短的5日RV，具有較大之標準差及高狹峰及右偏之特性，期間越長則越趨於平緩，而逐漸向左偏靠近。

而以當日至到期日為止所計算之真實波動度(ERV)則是低峰度、右偏，不過在距到期日之期間越短的話，則估計樣本將會過少，若在此期間指數報酬出現較大幅波動的話，則易出現過大或過小之極端值。此外，在計算ERV時，除了須考量距到期日期間外，在轉換月份時，也會因估計期間的不一致而使得當日與隔日之波動度出現過大的差距。

就預估模型之平均數而言，如表3所示，歷史波動度模型及GARCH模型均高於真實波動度之平均數，而隱含波動度模型及CBOE新編之VIX指數模型之平均數則較接近真實波動度。而歷史波動度、GARCH模型以及賣權之隱含波動度模型仍會出較大極端值之情形，而買權之隱含波動度、VIX指數則是較為穩定，未有過大極端值之情形。但僅以基本敘述統計量仍難以推論出何種模型具較高之預測能力，以下將進行迴歸分析，以比較不同模型之預測能力之優劣。

各模型之簡稱如下：

ERV：以當日至到期日之期間計算之波動度

5日RV：以未來5日為基準計算之真實波動度，10日、20日以此類推

HV：歷史波動度模型

GV：GARCH (1,1)模型

IV(call)：以買權計算之隱含波動度

IV(put)：以賣權計算之隱含波動度

IV：將買、賣權隱含波動度之平均值

VIX：以CBOE新編VIX指數之公式計算之波動度

表 2：不同期間真實波動度之基本統計量

	平均數	中間值	標準差	峰度	偏態	最小值	最大值
ERV	0.2633	0.2493	0.1016	0.0003	0.5715	0.0669	0.6069
5日RV	0.2475	0.2174	0.1265	0.7194	1.0251	0.0390	0.7271
10日RV	0.2581	0.2382	0.1059	-0.1494	0.6515	0.0650	0.5870
20日RV	0.2656	0.2717	0.0935	-0.7408	0.2661	0.1097	0.5559
30日RV	0.2662	0.2750	0.0840	-1.1203	-0.0270	0.1187	0.4709

表 3：不同波動度模型之基本統計量

	平均數	中間值	標準差	峰度	偏態	最小值	最大值
HV	0.2678	0.2723	0.0947	-0.8763	0.2234	0.1097	0.5220
GV	0.2967	0.3065	0.0700	-0.4974	-0.0315	0.1420	0.5217
IV(call)	0.2588	0.2618	0.0627	-0.4362	0.0696	0.1096	0.4561
IV(put)	0.2550	0.2585	0.0672	3.7438	0.6134	0.1051	0.7329
IV	0.2569	0.2611	0.0630	-0.3621	0.0449	0.1073	0.4682
VIX	0.2527	0.2558	0.0588	-0.6553	-0.0943	0.1168	0.3873

(二)、圖形分析

將不同波動度預測模型之估計值與未來不同期間真實波動度之走勢圖比較如圖3至圖7。

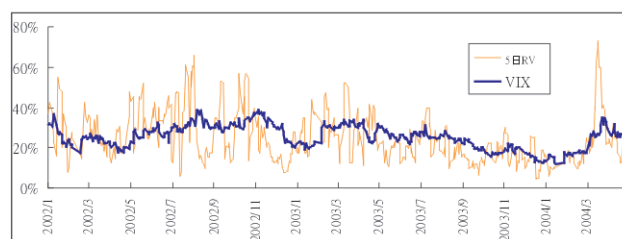
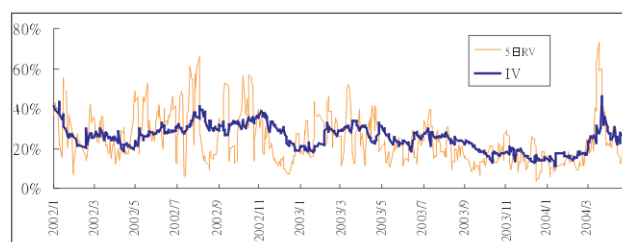
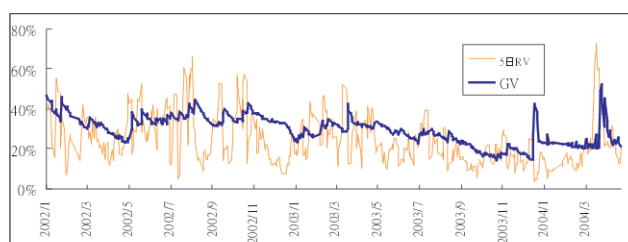
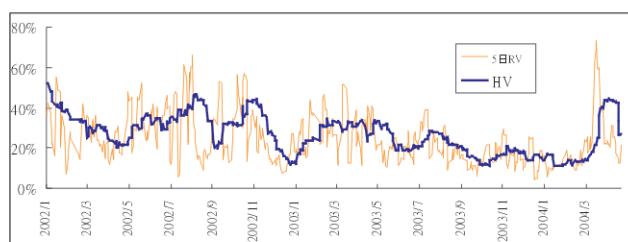


圖3 不同波動度模型之預測值與未來5日真實波動度之走勢圖

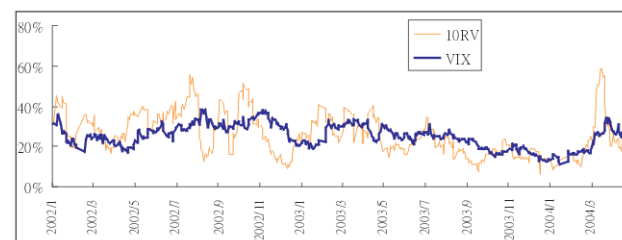
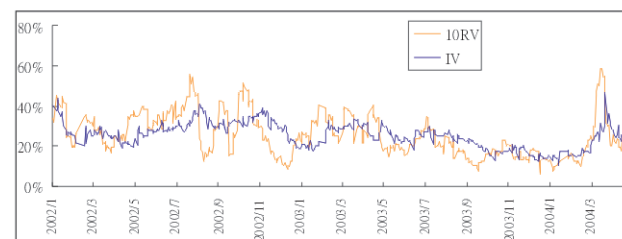
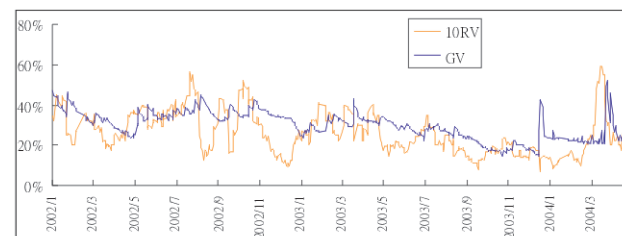
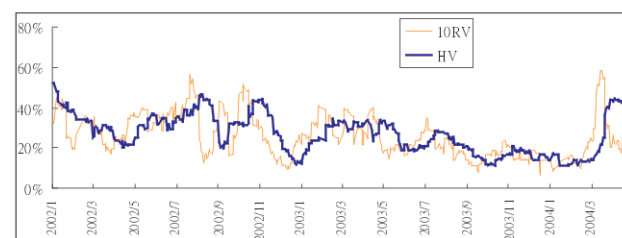


圖4 不同波動度模型之預測值與未來10日真實波動度之走勢圖



圖5 不同波動度模型之預測值與未來20日真實波動度之走勢圖

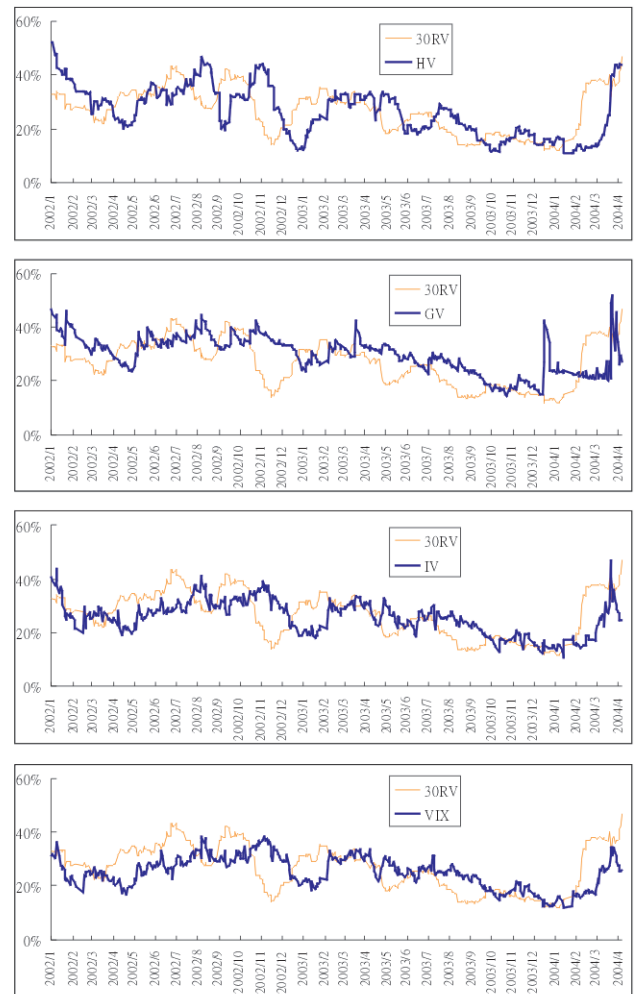


圖6 不同波動度模型之預測值與未來30日真實波動度之走勢圖

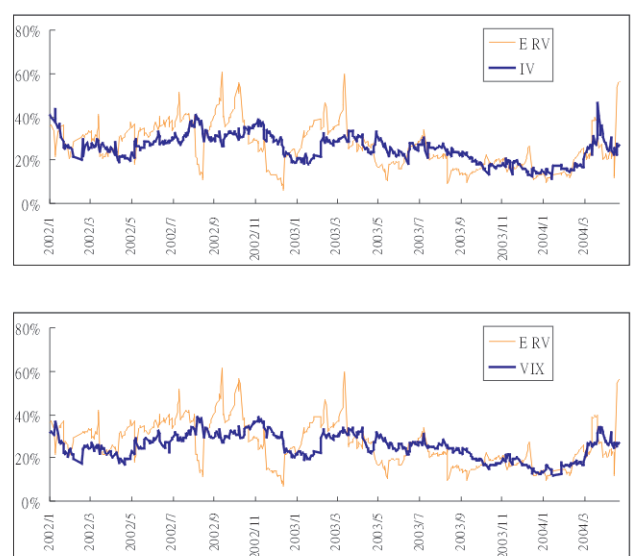
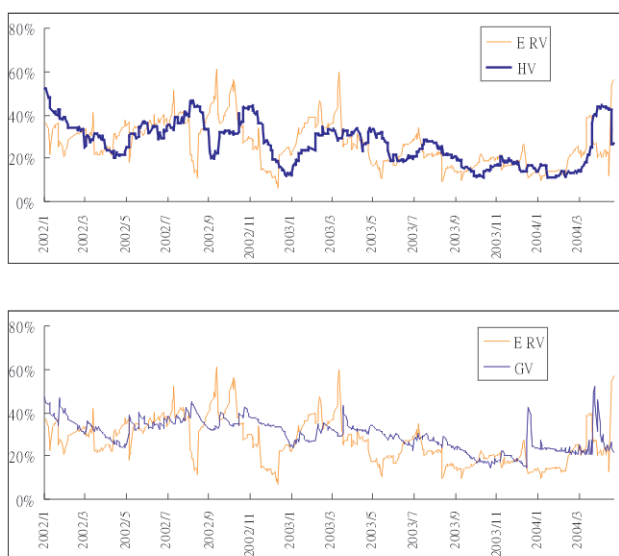


圖7 不同波動度模型預測值與至選擇權到期日之未來真實波動度之走勢圖

(三)、迴歸分析

以下本文將以迴歸分析來檢定各種波動度預估模型對真實波動度之解釋能力，下列迴歸式中， σ_t 為真實波動度， σ_t^j 為各波動度之估計值，若 β_1 顯著異於0，則所使用的預測模型具有資訊內涵解釋真實波動度，而迴歸分析中 R^2 之則說明整個迴歸式之解釋能力。

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_t^j + \varepsilon_t$$

表4至表8為各種波動度預測模型對未來不同期間真實波動度迴歸式之參數表，本文將樣本期間劃分為三期，樣本一是選擇權市場推出第一年之時段，年度日均量僅6316口，在該商品推出上半年之日均量更不及5000口，交易量之清淡也突顯出市場之不成熟，以選擇權價格估計真實波動度之隱含波動度模型及CBOE新編之VIX指數模型能否具有良好預測能力將須進一步探討。樣本二為選擇權市場推出後之第二年即2003年，在該時期，經過第一年的嘗試與學習後，選擇權市場第二年是處於快速成長之階段，尤其在2003年下半年，日均量更已達10萬口之上，成交量之熱絡應有助於選擇價格之連續性，減少價格跳空之頻率。而樣本三之時段則為2004年1月至2004年4月，每日之日均量更擴增至20萬口以上，市場逐步成熟。以下本文將依不同時期之迴歸分析，檢測不同波動度模型之預測能力。

1. 樣本一：交易量較低之時期 (2002.1.2~2002.12.31)

在樣本一之時期，不同波動度預測模型對未來不同期間之真實波動度之解釋能力均相當低， R^2 幾乎趨近於零，即毫無解釋能力，最高之 R^2 是以歷史波動度模型對未來10日RV之預測，但也僅有0.0864。綜合比較，HV(歷史波動度模型)對於10日及20日RV之預測較其他模型好，且 β_1 之t-test為顯著異於0，而 β_0 值分別為0.1800及0.2397，顯著異於0而符號為正，顯示HV有低估RV之現象。而IV(call)對於5日之RV以及VIX對於30日之RV較其他模型解釋能力好， R^2 分別為0.052及0.0185，偏低的情況並沒有改善。而GARCH模型在對未來不同期間之預期RV表現則是最差。

整體而言，在市場交易量不足，成交價格失真的情況下，波動度預測模型(HV)僅能對於短期之5日及10日RV有些微的解釋能力。任何模型對於20日、30日之RV以及以當日至到期日估算之真實波動度(ERV)，則幾近無解釋能力，各種波動度預測模型之 R^2 介於0.0001至0.0420之間，且迴歸係數 β_1 均不顯著異於0， β_0 則是顯著異於0且符號為正，顯示有低估RV之現象，而 β_0 之數值相較樣本二、樣本三為高，顯示低估情形更為嚴重。故在市場不成熟之階段，不管何種波動度模型對真實波動度均難有良好的解釋能力。也說明若樣本期間若不經切割劃分成熟與不成熟期，將無法判別各種波動度模型解釋能力之優劣。

2. 樣本二：交易量穩定成長之時期 (2003.1.2~2003.12.31)

在2003年前半年是選擇權市場交易量成長最為快速之時候，每個月份都是以倍數成長，雖然2003年下半年成長速度放慢，但是日交易均量都維持在10萬口之上，交易量的穩定也全面提高了各種波動度模型之解釋能力。該期間歷史波動度模型(HV)，對於未來5日及20日RV具有較好的解釋能力，僅次於VIX指數，但對於其他期間RV之解釋則落後於其他模型。在GARCH模型方面，仍是所有波動度預測模型中最差者，但是在交易量成長的情況下，GARCH模型的解釋仍較樣本一大幅提升，譬如以GARCH模型預測30日之RV，其 R^2 仍達0.3071。

在隱含波動度模型方面，對於10日、20日、30日RV之解釋能力均相當高， R^2 約維持於0.3，僅次於VIX指數，至於IV(call)及IV(put)何者之預測性較高，在樣本二的檢測，並無一致性的結果，而就 R^2 的表現來看，取兩者平均數之IV，則比IV(call)及IV(put)擁有較高的解釋能力。

而解釋能力最高的迴歸式則非VIX指數莫屬，不管何種期間真實波動度之預測，或者以當日至到期日計算之ERV，其解釋能力皆領先其他模型。其中對10日、20日、30日RV之解釋，其 R^2 均高達0.3以上，對30日RV之 R^2 更達0.3830。 β_0 雖然顯著異於0，但是已是各種預測模型中最小者，約為0.03至0.05之間，且相較於樣本一，低估之情形也有更佳之改善，的部份則顯著異於0，也較樣本一更趨近於1。

綜合以上，在選擇權成交量大幅成長及日均量穩定於八萬口以上之樣本二，各種波動度模型均提高了解釋能力，其中隱含波動度模型與VIX指數之 R^2 更是大幅提升，隱含波動度模型是取最接近價平，價內、價外各一檔之買、賣權，共計四個選擇權合約計算而得，通常接近價平之選擇權合約之交易量均高於其他序列，對整個選擇權市場已具有較高的代表性。而VIX指數之計算方式則是包含了所有價外合約之買、賣權，參與計算VIX指數的序列更多，在交易量不足的樣本一時期，深價外的選擇權易出現價格不合理之情形，恐有導致VIX指數計算失真之虞，但是在交易量及成交價格已趨於穩定的樣本二時期，VIX指數已能對真實波動度提供較優之預測能力。

3. 樣本三：交易量穩定之時期 (2004.1.2~2004.4.23)

在樣本三之階段，選擇權市場之日均量已達20萬口以上，顯示市場已更趨於成熟化。就歷史波動度模型與GARCH模型而言，其預測能力仍是所有預測模型最差者，其 R^2 甚至低於樣本二，不排除為受樣本期間較短之原因。

而就隱含波動度模型與VIX指數而言，迴歸式之解釋能力則是進一步的提高，並不受樣本期間較短的影響，反而因交易量的提升而提高了解釋能力。其中IV對5日及10日RV之解釋能力分別已達0.4829及0.5137，也超越了VIX指數，但隱含波動度模型之 β_1 則上升至1.4以上，而 β_0 則為負，顯示IV對未來期間較短之真實波動度的預測可能有高估之現象。

而VIX波動度指數在樣本三對真實波動度的解釋則有更好的提升效果，在對20日、30日RV之解釋能力仍是排名第一， R^2 分別為0.3422及0.4322，而 β_0 不顯著異於0，而 β_1 也較樣本二更趨近於1，顯示VIX指數在選擇權交易量增加及穩定的情況下，應能提供對真實波動度較好的預測能力及更多的資訊內涵。

VIX指數在對5日、10日RV之 R^2 低於隱含波動度模型的原因，本文推論如下，在三月下旬及四月份，台指期貨曾出現跌停或漲停之現象，例如在期指跌停時，期貨市場面臨無法交易的情況，欲停損及欲尋求避險工具之期貨投資者，均沒有管道可供出場或是建立避險部位的管道，進而轉向選擇權市場。而選擇權市場本身除了因現貨標的走勢而調整價格外，又增加了強大的空頭勢力，尤在賣權部份，在市場避險需求大幅提高的情況下，其價格上漲幅度完全偏離了理論上的Delta值，如圖8，買權於2004年3月下旬之隱含波動度最高約達40%，但是如圖9，賣權於同時間之隱含波動度則是高達接近80%，顯示當時賣權價格出現過於偏差的價格，賣權漲停的序列一路從深價內延伸至價外。在此情形下，隱含波動度模型僅取最接近價平的四檔合約，但是VIX指數之編制是取所有價外的買、賣權合約，而選擇權價格過度偏離的程度，尤以價外賣權為最，因此造成選取較多價外合約為計算基礎之VIX指數對於短期(5日、10日)RV之預測能力低於隱含波動度模型。

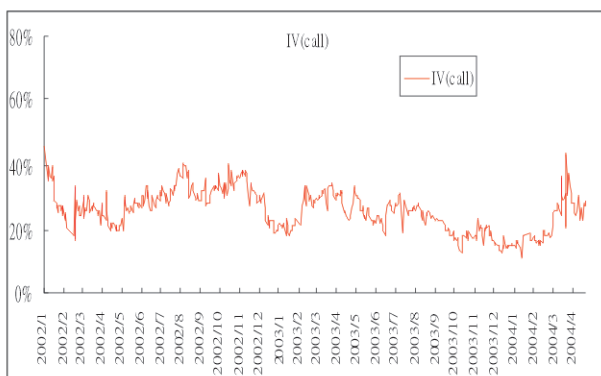


圖8 買權之隱含波動度變化圖



圖9 賣權之隱含波動度變化圖

4. 全樣本期間 (2002.1.2 ~ 2004.4.23)

全樣本期間包含了樣本一交易量偏低的時間，由前文所述，在交易量過低的情況下，將會降低各種波動度預測模型的解釋能力，也因此全樣本時期各種模型之 R^2 均較樣本二及樣本三為低。各模型解釋能力的排序也有所改變，隱含波動度模型不管對未來任何期間RV之迴歸式均擁有最高解釋能力。

而VIX指數方面，其 R^2 不但均低於隱含波動度模型，甚至出現低於歷史波動度模型及GARCH模型的情形，歸究其原因，除了因樣本一交易量過低外，另一原因則是在樣本三也曾因漲跌停的限制，而使得選擇權價格出現過度偏離之情形，上述兩點原因將會使以所有價外選擇權為計算基礎之VIX指數出現解釋能力低於僅取四檔接近價平合約為計算基礎的隱含波動度模型為低的情形。

表9為在不同樣本期間，各種波動度模型對未來不同期間之真實波動度迴歸分析 R^2 高低之比較表，粗體黑字為在該樣本期間內，對於不同期間真實波動度解釋能力最高之波動度預測模型。由表中可發現在樣本一內，因市場成立初期，交易量偏低而導致流動性不佳，選擇權價格跳動不連續，易出偏離理論值過大之情形，而造成各種波動度預測模型幾乎無解釋能力。在樣本二的期間內，交易量穩定成長，且日均量已達8萬口以上，除了各種波動度預測模型解釋能力均提高外，VIX模型之表現亦領先其他波動度預測模型，不管對未來何種期間之真實波動度解釋能力皆為最高者。而於樣本三內，日交易均量已增加至20萬口以上，交易狀況更為穩定，VIX模型對於20日及30日真實波動度之預測是為最優良者，但是在三月下旬及四月上旬，台指期貨出現多次的漲跌停，讓選擇權價格再次出現偏離理論過大的情形，而VIX模型是以所有價外選擇權合約作為計算之基礎，擷取到不合理價格的機會增加，而隱含波動度模型之計算基礎為靠價平之四個選擇權序列，計算波動度時擷取到不合理價格的機會降低，因而出現VIX模型對於預測未來5日、10日及至選擇權到期為止之真實波動度，解釋能力低於隱含波動度模型的情形，主是由於在現貨及期貨市場漲跌停的限制，讓市場預期及避險需求無法在當日內完全消化，而反應至選擇權市場上，若不考慮該項限制因素，由樣本二來看，VIX模型仍為一優良之波動度預測模型。

表 4：預測5日真實波動度之迴歸分析

		β_0	β_1	R^2	$RNAK$
樣本一 (二〇〇二年)	HV	0.1828 (5.3068)*	0.3306 (3.1809)*	0.0398	(3)
	GV	0.1534 (2.2462)*	0.3908 (2.0016)*	0.0162	(6)
	IV(call)	0.1173 (2.4606)*	0.5843 (3.6589)*	0.0520	(1)
	IV(put)	0.1445 (2.9313)*	0.4938 (2.9761)*	0.0350	(4)
	IV	0.1179 (2.3469)*	0.5836 (3.4562)*	0.0467	(2)
	VIX	0.1863 (3.8380)*	0.3662 (2.1473)*	0.0185	(5)
樣本二 (二〇〇三年)	HV	0.0841 (4.3090)*	0.5769 (6.9676)*	0.1643	(2)
	GV	0.0964 (3.8047)*	0.4520 (4.7828)*	0.0848	(6)
	IV(call)	0.0491 (1.9622)	0.7064 (6.7812)*	0.1570	(4)
	IV(put)	0.0577 (2.4055)*	0.6830 (6.7255)*	0.1548	(5)
	IV	0.0504 (2.0426)*	0.7077 (6.8289)*	0.1588	(3)
	VIX	0.0392 (1.6249)	0.7433 (7.4451)*	0.1833	(1)
樣本三 (二〇〇四年一月至四月)	HV	0.1291 (3.7112)*	0.3978 (2.9886)*	0.1090	(5)
	GV	0.0894 (1.3337)	0.5271 (2.0245)*	0.0532	(6)
	IV(call)	-0.1038 (-2.2152)*	1.4399 (7.2236)*	0.4168	(2)
	IV(put)	-0.0097 (-0.2718)	1.0706 (6.9690)*	0.3995	(3)
	IV	-0.1004 (-2.4556)*	1.4574 (8.2559)*	0.4829	(1)
	VIX	-0.1073 (-2.1176)*	1.5054 (6.7276)*	0.3827	(4)
全樣本	HV	0.1123 (7.6161)*	0.5049 (9.7246)*	0.1427	(5)
	GV	0.0716 (3.2799)*	0.5929 (8.2811)*	0.1077	(6)
	IV(call)	0.0174 (0.8619)	0.8889 (11.6943)*	0.1940	(2)
	IV(put)	0.0392 (2.0874)*	0.8171 (11.4839)*	0.1884	(3)
	IV	0.0152 (0.7628)	0.9044 (12.0278)*	0.2030	(1)
	VIX	0.0332 (1.5414)	0.8484 (10.2328)*	0.1557	(4)

註：以上表中 β_0 、 β_1 參數下方之括弧值為檢定參數是否異於0之 t-test 值，*表示在95%信賴水準下為顯著。

表 5：預測10日真實波動度之迴歸分析

		β_0	β_1	R^2	$RNAK$
樣本一 (二〇〇二年)	HV	0.1800 (6.9862)*	0.3753 (4.8048)*	0.0864	(1)
	GV	0.2235 (4.2187)*	0.2205 (1.4515)	0.0086	(6)
	IV(call)	0.1471 (3.9982)*	0.5217 (4.2161)*	0.0679	(2)
	IV(put)	0.1653 (4.4158)*	0.4611 (3.6514)*	0.0518	(4)
	IV	0.1450 (3.7788)*	0.5296 (4.0922)*	0.0642	(3)
	VIX	0.2198 (5.8995)*	0.2860 (2.1817)*	0.0191	(5)
樣本二 (二〇〇三年)	HV	0.0673 (4.7771)*	0.6789 (11.3548)*	0.2752	(5)
	GV	0.0717 (3.7364)*	0.5713 (7.9840)*	0.2061	(6)
	IV(call)	0.0364 (1.9752)	0.7885 (10.2635)*	0.2990	(4)
	IV(put)	0.0441 (2.4998)*	0.7707 (10.3139)*	0.3010	(3)
	IV	0.0369 (2.0361)*	0.7942 (10.4275)*	0.3057	(2)
	VIX	0.0350 (1.9677)	0.7896 (10.7328)*	0.3180	(1)
樣本三 (二〇〇四年一月至四月)	HV	0.1739 (5.1671)*	0.3039 (2.3726)*	0.0716	(5)
	GV	0.1941 (3.0111)*	0.2022 (0.8077)	0.0089	(6)
	IV(call)	-0.0853 (-2.0143)*	1.4535 (8.1097)*	0.4739	(2)
	IV(put)	0.0249 (0.7361)	1.0130 (7.0056)*	0.4020	(4)
	IV	-0.0708 (-1.8785)	1.4211 (8.7810)*	0.5137	(1)
	VIX	-0.0955 (-2.0823)*	1.5483 (7.6872)*	0.4474	(3)
全樣本	HV	0.1182 (9.9765)*	0.5235 (12.5214)*	0.2163	(5)
	GV	0.0910 (5.0521)*	0.5642 (9.5385)*	0.1381	(6)
	IV(call)	0.0254 (1.5724)	0.9006 (14.8439)*	0.2795	(2)
	IV(put)	0.0496 (3.3220)*	0.8186 (14.4543)*	0.2689	(3)
	IV	0.0245 (1.5531)	0.9105 (15.2625)*	0.2908	(1)
	VIX	0.0464 (2.6761)*	0.8383 (12.5336)*	0.2167	(4)

註：以上表中 β_0 、 β_1 參數下方之括弧值為檢定參數是否異於0之 t-test 值，*表示在95%信賴水準下為顯著。

表 6：預測20日真實波動度之迴歸分析

		β_0	β_1	R^2	$RNAK$
樣本一 (二〇〇二年)	HV	0.2397 (11.9407)*	0.1964 (3.2721)*	0.0420	(1)
	GV	0.2664 (6.5193)*	0.1064 (0.9110)	0.0034	(4)
	IV(call)	0.2668 (9.1971)*	0.1241 (1.2770)	0.0066	(2)
	IV(put)	0.2820 (9.4618)*	0.0729 (0.7270)	0.0022	(5)
	IV	0.2719 (8.9096)*	0.1072 (1.0451)	0.0045	(3)
	VIX	0.3147 (10.8049)*	-0.0408 (-0.3991)	0.0007	(6)
樣本二 (二〇〇三年)	HV	0.0869 (6.6921)*	0.5930 (10.7578)*	0.3191	(2)
	GV	0.0685 (4.0739)*	0.5839 (9.3135)*	0.2599	(6)
	IV(call)	0.0511 (3.0515)*	0.7254 (10.3917)*	0.3042	(5)
	IV(put)	0.0566 (3.5502)*	0.7159 (10.5979)*	0.3126	(4)
	IV	0.0507 (3.0874)*	0.7344 (10.6402)*	0.3143	(3)
	VIX	0.0407 (2.5743)*	0.7647 (11.6997)*	0.3566	(1)
樣本三 (二〇〇四年一~四月)	HV	0.2118 (6.8417)*	0.3387 (2.8611)*	0.1008	(5)
	GV	0.3509 (5.7935)*	-0.2453 (-1.0431)	0.0147	(6)
	IV(call)	0.0328 (0.7382)	1.1402 (6.0426)	0.3334	(2)
	IV(put)	0.1504 (4.0852)*	0.6472 (4.0877)*	0.1863	(4)
	IV	0.0694 (1.6361)	1.0003 (5.4629)*	0.2902	(3)
	VIX	0.0151 (0.3272)	1.2603 (6.1628)*	0.3422	(1)
全樣本	HV	0.1423 (13.6013)*	0.4613 (12.4943)*	0.2156	(3)
	GV	0.1287 (8.0115)*	0.4620 (8.7506)*	0.1188	(6)
	IV(call)	0.0814 (5.5138)*	0.7126 (12.8267)*	0.2246	(2)
	IV(put)	0.1058 (7.6928)*	0.6272 (12.0141)*	0.2026	(4)
	IV	0.0837 (5.7629)*	0.7087 (12.8843)*	0.2262	(1)
	VIX	0.0967 (6.1647)*	0.6687 (11.0493)*	0.1769	(5)

註：以上表中 β_0 、 β_1 參數下方之括弧值為檢定參數是否異於0之 t-test 值，*表示在95%信賴水準下為顯著。

表 7：預測30日真實波動度之迴歸分析

		β_0	β_1	R^2	$RNAK$
樣本一 (二〇〇二年)	HV	0.3101 (17.5481)*	-0.0128 (-0.2403)	0.0002	(6)
	GV	0.3294 (9.5257)*	-0.0674 (-0.6820)	0.0019	(4)
	IV(call)	0.3173 (12.8930)*	-0.0383 (-0.4648)	0.0009	(5)
	IV(put)	0.3294 (13.0783)*	-0.0798 (-0.9414)	0.0036	(2)
	IV	0.3245 (12.5608)*	-0.0631 (-0.7267)	0.0022	(3)
	VIX	0.3575 (14.6437)*	-0.1838 (-2.1434)*	0.0185	(1)
樣本二 (二〇〇三年)	HV	0.0938 (7.6236)*	0.5485 (10.4985)*	0.3085	(5)
	GV	0.0619 (4.0467)*	0.5969 (10.4640)*	0.3071	(6)
	IV(call)	0.0559 (3.5668)*	0.6917 (10.6009)*	0.3127	(4)
	IV(put)	0.0589 (3.9804)*	0.6921 (11.0367)*	0.3303	(2)
	IV	0.0543 (3.5511)*	0.7052 (10.9715)*	0.3277	(3)
	VIX	0.0421 (2.8906)*	0.7453 (12.3835)*	0.3830	(1)
樣本三 (二〇〇四年一月至四月)	HV	0.2214 (8.8243)*	0.3889 (3.6247)*	0.1749	(5)
	GV	0.2321 (4.7459)*	0.2739 (1.4647)	0.0334	(6)
	IV(call)	0.1038 (2.9617)*	0.9009 (5.9071)*	0.3601	(2)
	IV(put)	0.1900 (6.6075)*	0.5331 (4.2330)*	0.2242	(4)
	IV	0.1272 (3.8481)*	0.8139 (5.5739)*	0.3338	(3)
	VIX	0.0689 (1.9558)	1.1088 (6.8700)*	0.4322	(1)
全樣本	HV	0.1712 (17.4739)*	0.3580 (10.2945)*	0.1598	(5)
	GV	0.1140 (8.1155)*	0.5109 (11.1308)*	0.1820	(3)
	IV(call)	0.1191 (8.7927)*	0.5688 (11.1878)*	0.1835	(2)
	IV(put)	0.1366 (10.8168)*	0.5085 (10.6222)*	0.1684	(4)
	IV	0.1197 (8.9597)*	0.5706 (11.3017)*	0.1865	(1)
	VIX	0.1296 (9.0233)*	0.5414 (9.7711)*	0.1463	(6)

註：以上表中 β_0 、 β_1 參數下方之括弧值為檢定參數是否異於0之 t-test 值，*表示在95%信賴水準下為顯著。

表 8：預測至選擇權到期日為止真實波動度(E RV)之迴歸分析

		β_0	β_1	R^2	$RNAK$
樣本一 (二〇〇二年)	HV	0.2737 (10.9633)*	0.1087 (1.4426)	0.0085	(3)
	GV	0.3164 (6.4441)*	-0.0224 (-0.1599)	0.0001	(6)
	IV(call)	0.2492 (7.1805)*	0.2022 (1.7388)	0.0122	(1)
	IV(put)	0.2682 (7.5165)*	0.1378 (1.1472)	0.0054	(4)
	IV	0.2545 (6.9685)*	0.1846 (1.5036)	0.0092	(2)
	VIX	0.2871 (8.2197)*	0.0768 (0.6258)	0.0016	(5)
樣本二 (二〇〇三年)	HV	0.0884 (5.2744)*	0.6212 (8.7310)*	0.2358	(4)
	GV	0.0938 (4.2397)*	0.5173 (6.2742)*	0.1375	(6)
	IV(call)	0.0459 (2.1484)*	0.7813 (8.7767)*	0.2377	(3)
	IV(put)	0.0559 (2.7262)*	0.7531 (8.6622)*	0.2330	(5)
	IV	0.0476 (2.2609)*	0.7815 (8.8269)*	0.2398	(2)
	VIX	0.0358 (1.7503)	0.8189 (9.6914)*	0.2755	(1)
樣本三 (二〇〇四年一、四月)	HV	0.1619 (6.2059)*	0.2889 (2.8938)*	0.1029	(5)
	GV	0.2064 (4.0123)*	0.0887 (0.4443)	0.0027	(6)
	IV(call)	0.0180 (0.4742)	0.9336 (5.7770)*	0.3137	(1)
	IV(put)	0.1040 (3.3925)*	0.5782 (4.3872)*	0.2087	(4)
	IV	0.0398 (1.1199)	0.8560 (5.5706)*	0.2983	(3)
	VIX	0.0110 (0.2733)	0.9980 (5.6091)*	0.3012	(2)
全樣本	HV	0.1469 (12.5679)*	0.4348 (10.5648)*	0.1642	(5)
	GV	0.1077 (6.2299)*	0.5243 (9.2429)*	0.1307	(6)
	IV(call)	0.0705 (4.3847)*	0.7450 (12.3463)*	0.2116	(2)
	IV(put)	0.0946 (6.2967)*	0.6614 (11.6044)*	0.1916	(3)
	IV	0.0720 (4.5389)*	0.7447 (12.4220)*	0.2136	(1)
	VIX	0.0769 (4.5263)*	0.7378 (11.2684)*	0.1827	(4)

註：ERv為至選擇權到期日為止之真實波動度，以上表中 β_0 、 β_1 參數下方之括弧值為檢定參數是否異於0之 t-test 值，*表示在95%信賴水準下為顯著。

表9：不同樣本期間各波動度預測模型之 MAE 比較表

	樣本一 (2002年全年)					樣本二 (2003年全年)					樣本三 (2004年1-4月)				
	5日	10日	20日	30日	ERV	5日	10日	20日	30日	ERV	5日	10日	20日	30日	ERV
HV	0.04	0.09	0.04	0.00	0.01	0.16	0.28	0.32	0.31	0.24	0.11	0.07	0.10	0.17	0.10
GV	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.08	0.21	0.26	0.31	0.14	0.05	0.01	0.01	0.03	0.00
IV(call)	0.05	0.07	0.01	0.00	0.01	0.16	0.30	0.30	0.31	0.24	0.42	0.47	0.33	0.36	0.31
IV(put)	0.04	0.05	0.00	0.00	0.01	0.15	0.30	0.31	0.33	0.23	0.40	0.40	0.19	0.22	0.21
IV	0.05	0.06	0.00	0.00	0.01	0.16	0.31	0.31	0.33	0.24	0.48	0.51	0.29	0.33	0.30
VIX	0.02	0.02	0.00	0.02	0.00	0.18	0.32	0.36	0.38	0.28	0.38	0.45	0.34	0.43	0.30
小結	市場成立初期流動性不佳，各波動度模型幾乎無解釋能力。					市場漸趨成熟，且交易量穩定成長，VIX指數與隱含波動度模型對不同期間真實波動度之預測能力較高，整體而言，VIX指數仍為較優良之預測模型。									

註：5日、10日、20日、30日為對未來不同期間之真實波動度，ERV為計算日至選擇權到期之真實波動度。

(四)、平均絕對誤差(MAE)與均方根誤差(RMSE)之檢定

為檢視預估波動度與實際波動度之誤差，本文以 MAE 與 RMSE 來衡量兩者之間的差距。詳細結果如 10 及表 11，在樣本一，MAE 與 RMSE 的大小排序是相同的，除 5 日 RV 之誤差是以 IV(call) 較小外，其餘與未來各期間 RV 之誤差皆是以 IV 為最小。與迴歸分析不同的是，雖然歷史波動度模型在對 10 日、20 日 RV 具有較高的解釋能力，但是其誤差仍是高於隱含波動度模型。

在樣本二時段，IV(put) 對於 5 日、10 日之 MAE 為最小，其餘不同波動度預測模型之真實波動度之 MAE 及 RMSE，皆是以 VIX 指數為最小，與迴歸分析的結論一致。此外，在選擇權市場交易量放大的第二年，MAE 與 RMSE 所表現的誤差值皆比樣本一來得小，顯示在該時段，隨著交易量的放大，樣本二時段之估計誤差是明顯地縮小。

樣本三時段，除 VIX 模型對 20 日 RV 之 MAE 為最小外，其餘則是以隱含波動度模型的誤差值為最小，與迴歸分析接近。而與樣本二不同的是，在樣本三各種波動度預測模型對 20 日及 30 日 RV 之 MAE 與 RMSE，出現較樣本二大的情形，推論原因是在樣本三之三、四月份，真實波動度以較快的幅度上升，而波動度預測模型雖然可以提供較高的解釋能力，但是在就誤差的衡量上，仍有放大之現象，顯示當真實波動度在快速攀升時，波動度預測模型會出現落後之現象。

表 10：各模型預測波動度之MAE比較表 (日資料)

預測 5 日 RV 之 MAE

	樣本一	樣本二	樣本三	全樣本
HV	0.1236 (5)	0.0723 (3)	0.1106 (5)	0.0995 (5)
GV	0.1268 (6)	0.0839 (6)	0.1126 (6)	0.1062 (6)
IV(call)	0.1130 (1)	0.0728 (5)	0.0765 (3)	0.0906 (3)
IV(put)	0.1142 (3)	0.0717 (1)	0.0712 (2)	0.0900 (2)
IV	0.1131 (2)	0.0721 (2)	0.0710 (1)	0.0896 (1)
VIX	0.1150 (4)	0.0725 (4)	0.0777 (4)	0.0915 (4)

預測 10 日 RV 之 MAE

	樣本一	樣本二	樣本三	全樣本
HV	0.0959 (5)	0.0569 (5)	0.1259 (6)	0.0828 (5)
GV	0.0966 (6)	0.0658 (6)	0.1198 (5)	0.0862 (6)
IV(call)	0.0895 (2)	0.0553 (4)	0.0758 (2)	0.0727 (3)
IV(put)	0.0901 (3)	0.0533 (1)	0.0784 (3)	0.0725 (2)
IV	0.0891 (1)	0.0540 (3)	0.0735 (1)	0.0717 (1)
VIX	0.0952 (4)	0.0538 (2)	0.0786 (4)	0.0749 (4)

預測 20 日 RV 之 MAE

	樣本一	樣本二	樣本三	全樣本
HV	0.0886 (6)	0.0506 (5)	0.1242 (5)	0.0767 (5)
GV	0.0804 (4)	0.0567 (6)	0.1398 (6)	0.0779 (6)
IV(call)	0.0763 (2)	0.0481 (4)	0.1006 (2)	0.0672 (2)
IV(put)	0.0766 (3)	0.0472 (2)	0.1103 (4)	0.0682 (3)
IV	0.0754 (1)	0.0473 (3)	0.1036 (3)	0.0668 (1)
VIX	0.0810 (5)	0.0462 (1)	0.0999 (1)	0.0683 (4)

預測 30 日 RV 之 MAE

	樣本一	樣本二	樣本三	全樣本
HV	0.0896 (6)	0.0491 (5)	0.1608 (6)	0.0813 (6)
GV	0.0762 (4)	0.0548 (6)	0.1313 (4)	0.0741 (5)
IV(call)	0.0748 (3)	0.0452 (4)	0.1204 (1)	0.0679 (2)
IV(put)	0.0746 (2)	0.0429 (2)	0.1323 (5)	0.0683 (3)
IV	0.0740 (1)	0.0436 (3)	0.1244 (3)	0.0673 (1)
VIX	0.0795 (5)	0.0425 (1)	0.1239 (2)	0.0692 (4)

預測 ERV 之 MAE

	樣本一	樣本二	樣本三	全樣本
HV	0.0956 (6)	0.0604 (5)	0.1089 (6)	0.0820 (6)
GV	0.0871 (4)	0.0677 (6)	0.0976 (5)	0.0800 (5)
IV(call)	0.0855 (2)	0.0588 (4)	0.0656 (2)	0.0712 (2)
IV(put)	0.0858 (3)	0.0581 (2)	0.0687 (4)	0.0715 (3)
IV	0.0846 (1)	0.0583 (3)	0.0649 (1)	0.0705 (1)
VIX	0.0916 (5)	0.0562 (1)	0.0662 (3)	0.0728 (4)

註1：括弧值為各模型 MAE 值由小至大之排序

註2：樣本一為2002年，樣本二為2003年，樣本三為2004年1至4月，全樣本為2002年1月至2004年4月

表 4-11：各模型預測波動度之RMSE比較表 (日 資料)

預測 5 日 RV 之 RMSE

	樣本一	樣本二	樣本三	全樣本
HV	0.1476 (5)	0.0901 (5)	0.1596 (6)	0.1277 (5)
GV	0.1492 (6)	0.1057 (6)	0.1511 (5)	0.1323 (6)
IV(call)	0.1343 (1)	0.0889 (4)	0.1177 (3)	0.1143 (2)
IV(put)	0.1361 (3)	0.0884 (3)	0.1159 (2)	0.1148 (3)
IV	0.1344 (2)	0.0884 (2)	0.1121 (1)	0.1134 (1)
VIX	0.1387 (4)	0.0878 (1)	0.1212 (4)	0.1166 (4)

預測 10 日 RV 之 RMSE

	樣本一	樣本二	樣本三	全樣本
HV	0.1188 (5)	0.0677 (5)	0.1660 (6)	0.1083 (5)
GV	0.1197 (6)	0.0827 (6)	0.1520 (5)	0.1105 (6)
IV(call)	0.1071 (2)	0.0674 (4)	0.1085 (1)	0.0921 (2)
IV(put)	0.1076 (3)	0.0665 (2)	0.1214 (4)	0.0942 (3)
IV	0.1064 (1)	0.0665 (3)	0.1103 (2)	0.0918 (1)
VIX	0.1128 (4)	0.0661 (1)	0.1152 (3)	0.0957 (4)

預測 20 日 RV 之 RMSE

	樣本一	樣本二	樣本三	全樣本
HV	0.1059 (6)	0.0627 (5)	0.1610 (6)	0.0998 (5)
GV	0.0999 (5)	0.0757 (6)	0.1595 (5)	0.1007 (6)
IV(put)	0.0944 (3)	0.0595 (3)	0.1439 (4)	0.0901 (4)
IV(call)	0.0935 (2)	0.0604 (4)	0.1259 (1)	0.0863 (1)
IV	0.0929 (1)	0.0595 (2)	0.1311 (3)	0.0868 (2)
VIX	0.0991 (4)	0.0583 (1)	0.1300 (2)	0.0892 (3)

預測 30 日 RV 之 RMSE

	樣本一	樣本二	樣本三	全樣本
HV	0.1086 (6)	0.0618 (5)	0.1402 (6)	0.0967 (6)
GV	0.0925 (4)	0.0732 (6)	0.1154 (4)	0.0882 (5)
IV(call)	0.0886 (2)	0.0582 (4)	0.1086 (1)	0.0801 (1)
IV(put)	0.0891 (3)	0.0565 (2)	0.1273 (5)	0.0834 (4)
IV	0.0877 (1)	0.0569 (3)	0.1137 (3)	0.0802 (2)
VIX	0.0940 (5)	0.0555 (1)	0.1120 (2)	0.0825 (3)

預測 ERV 之 RMSE

	樣本一	樣本二	樣本三	全樣本
HV	0.1217 (6)	0.0771 (5)	0.1375 (6)	0.1072 (6)
GV	0.1136 (5)	0.0889 (6)	0.1279 (5)	0.1057 (5)
IV(call)	0.1063 (2)	0.0740 (3)	0.0925 (1)	0.0916 (1)
IV(put)	0.1076 (3)	0.0743 (4)	0.1067 (4)	0.0944 (4)
IV	0.1060 (1)	0.0738 (2)	0.0943 (3)	0.0916 (2)
VIX	0.1112 (4)	0.0721 (1)	0.0938 (2)	0.0936 (3)

註1：括弧值為各模型 RMSE 值由小至大之排序

註2：樣本一為2002年，樣本二為2003年，樣本三為2004年1至4月，全樣本為2002年1月至2004年4月

三、加入交易量之波動度預測

Chen、Cuny 及 Haugen(1995) 指出較高的波動度會導致投資者增加期貨交易需求，因而調整期貨部位，亦發現波動度與未平倉量與S&P500指數期貨有顯著正相關。而Karpoff(1987) 及 Anthony(1988) 指出波動度和交易量之間存在正向關係。但亦有文獻是持相反的論點，如Brooks(1998) 指出價量間的關係並非顯著，在加入前一期交易量的解釋變數後，波動度之預估值並不能增加對未來真實波動度的解釋能力。本文以下將以歷史波動度模型(HV)、GARCH模型、隱含波動度模型是取IV(call)及IV(put)之平均值IV為預測模型、VIX指數分別加入前一期之期貨交易量及前一期之選擇權交易量為解釋變數中，檢視交易量的變化是否會增加波動度的預測績效，真實波動度則取未來20日之RV，迴歸分析模型如下：

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^j + \beta_2 \Delta vol_{t-1}^F + \varepsilon_t$$

$$\sigma_t = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^j + \beta_2 \Delta vol_{t-1}^{OP} + \varepsilon_t$$

σ_t ：為未來20日之真實波動度

σ_{t-1}^j ：為前一期波動度模型之預估值，
j 為 HV、GV、IV、VIX

vol_t^F ：第t期之期貨交易量

vol_t^{OP} ：第t期之選擇權交易量

$\Delta vol_{t-1}^F = \ln(vol_{t-1}^F / vol_{t-2}^F)$ ：前一期之期貨交易量成長率

$\Delta vol_{t-1}^{OP} = \ln(vol_{t-1}^{OP} / vol_{t-2}^{OP})$ ：前一期之選擇權交易量成長率

(一)、加入期貨交易量成長率之迴歸分析

在加入期貨交易量成長率的解釋變數後，其迴歸係數 β_2 ，在樣本一、樣本二及全樣本為負值，而在樣本三則為正值，但是不論於那一段時期， β_2 都不顯著異於0，因此無法推論期貨交易量成長率與波動度之間具有特定的關係。而從加入期貨交易量變數迴歸分析的 R^2 與未加入期貨交易量變數的 R^2 成長幅度來看，樣本一出現大幅的成長，但是主要原因是基期過低的影響，加入交易量解釋變數後的 R^2 仍然是趨近於0。

顯示在加入前一期期貨交易量的變數後，並無法有效增加模型的預測績效。而在樣本二及樣本三，期貨交易量變數的加入對隱含波動度模型解釋能力的增加幅度則不及1%，但是在樣本三對VIX指數增加的解釋能力的增幅則有2.96%。對全樣本的資料而言，對加入期貨交易量資訊後，整個迴歸模型的解釋能力不但未增加，反而有降低之情形。此結果與Brooks(1998)研究結論相同，即前一期交易量的資訊並無法提升波動度模型的解釋能力。

(二)、加入選擇權交易量成長率之迴歸分析

在前文之迴歸分析中，本文將全樣本期間作了三個期間的劃分，以檢視選擇權市場的成熟度是否會影響到波動度的預測，在市場成熟度提高後，選擇權價格則較不易出現不合理的變動，有助於波動度模型的預測績效。本文將進一步檢視在加入選擇權交易量成長率的資訊後，是否能幫助預測模型提高對真實波動度的解釋能力。

在樣本一之階段，在加入前一期選擇權交易量成長率的變數後，就 R^2 的表現來看，解釋能力最高的歷史波動度模型也僅有0.0410，且 β_2 亦無顯著異於0，顯示整體之預測績效並非良好。而與未加入前一期選擇權交易量資訊的 R^2 比較的話，加入選擇權交易量資訊後的 R^2 出現較大幅的成長，當然部份原因是因基期過低而導致的情形，但是在樣本一選擇權較易出現不合理的情況下，加入交易量資訊仍是對模型的預測有所幫助。

而在樣本二，歷史波動度模型與隱含波動度模型加入選擇權交易量資訊的迴歸模型中的 β_2 係數，是為正值且顯著異於0，雖然係數不高，但所顯示的是選擇權交易量成長率和RV之間是具有正向的關係。而就 R^2 的成長幅度來看，各種波動度預測模型約有2.42%至4.07%的成長。

在樣本三之時期，本身VIX指數即能提供較好的預測能力，加入選擇權交易量變數後，只能提高約1.64%的解釋能力。綜合來看，在選擇權市場交易量較為穩定的樣本二及樣本三，預測模型本身就能提供較好的預測績效，而將交易量資訊納入為解釋變數中，仍可以小幅增加其解釋能力，並觀察到兩者之關連。

表 12：加入前一期之期貨交易量成長率後之迴歸係數表

		β_0	β_1	β_2	R^2	R_{NAK}
樣本一 (二〇〇二年)	HV, vol^F	0.2466 (11.9695)*	0.1767 (2.8434)*	-0.0068 (-0.4552)	0.0328	(1)
	GV, vol^F	0.2663 (6.5064)*	0.1067 (0.9113)	-0.0060 (-0.3999)	0.0040	(3)
	IV, vol^F	0.2717 (8.8871)*	0.1079 (1.0499)	-0.0062 (-0.4128)	0.0052	(2)
	VIX, vol^F	0.3145 (10.7742)*	-0.0399 (-0.3888)	-0.0058 (-0.3852)	0.0013	(4)
樣本二 (二〇〇三年)	HV, vol^F	0.0868 (6.6722)*	0.5938 (10.7538)*	-0.0073 (-0.5886)	0.3200	(2)
	GV, vol^F	0.0661 (3.9202)*	0.5931 (9.4215)*	-0.0177 (-1.3582)	0.2654	(4)
	IV, vol^F	0.0498 (3.0289)*	0.7384 (10.6790)*	-0.0123 (-0.9831)	0.3170	(3)
	VIX, vol^F	0.0404 (2.5534)*	0.7660 (11.7027)*	-0.0084 (-0.6986)	0.3578	(1)
樣本三 (二〇〇四年一、四月)	HV, vol^F	0.2091 (6.7306)*	0.3512 (2.9512)*	0.0801 (1.0121)	0.1134	(3)
	GV, vol^F	0.3506 (5.7663)*	-0.2436 (-1.0319)	0.0549 (0.6639)	0.0207	(4)
	IV, vol^F	0.0706 (1.6529)	0.9951 (5.3960)*	0.0332 (0.4716)	0.2924	(2)
	VIX, vol^F	0.0135 (0.2927)	1.2684 (6.2034)*	0.0714 (1.0613)	0.3524	(1)
全樣本	HV, vol^F	0.1503 (14.1893)*	0.4307 (11.5433)*	-0.0032 (-0.2754)	0.1904	(2)
	GV, vol^F	0.1310 (8.1485)*	0.4538 (8.6047)*	-0.0069 (-0.5693)	0.1156	(4)
	IV, vol^F	0.0959 (6.4996)*	0.6608 (11.8481)*	-0.0073 (-0.6260)	0.1985	(1)
	VIX, vol^F	0.1050 (6.6185)*	0.6360 (10.4024)*	-0.0051 (-0.4289)	0.1603	(3)

註：以上表中 β_0 、 β_1 、 β_2 參數下方之括弧值為檢定參數是否異於 0 之 t -test 值，* 表示在 95% 信賴水準下為顯著。

表 13：加入前一期之期貨交易量成長率後之 R^2 成長率

		未加入交 易量之 R^2	加入交 易量之 R^2	R^2 成長率
樣本一 (二〇〇一年)	HV, vol^F	0.0420	0.0328	-21.92%
	GV, vol^F	0.0034	0.0040	19.34%
	IV, vol^F	0.0045	0.0052	15.66%
	VIX, vol^F	0.0007	0.0013	93.51%
樣本二 (二〇〇三年)	HV, vol^F	0.3191	0.3200	0.30%
	GV, vol^F	0.2599	0.2654	2.12%
	IV, vol^F	0.3143	0.3170	0.85%
	VIX, vol^F	0.3566	0.3578	0.36%
樣本三 (二〇〇四年一月至四月)	HV, vol^F	0.1008	0.1134	12.51%
	GV, vol^F	0.0147	0.0207	40.82%
	IV, vol^F	0.2902	0.2924	0.75%
	VIX, vol^F	0.3422	0.3524	2.96%
全樣本	HV, vol^F	0.2156	0.1904	-11.70%
	GV, vol^F	0.1188	0.1156	-2.71%
	IV, vol^F	0.2262	0.1985	-12.22%
	VIX, vol^F	0.1769	0.1603	-9.37%

表 14：加入前一期之選擇權交易量成長率後之迴歸係數

		β_0	β_1	β_2	R^2	$RNAK$
樣本一 (二〇〇二年)	HV, vol^{OP}	0.2451 (11.9367)*	0.1803 (2.9110)*	0.0202 (1.5130)	0.0410	(1)
	GV, vol^{OP}	0.2654 (6.5067)*	0.1085 (0.9301)	0.0186 (1.3773)	0.0111	(3)
	IV, vol^{OP}	0.2712 (8.9017)*	0.1087 (1.0618)	0.0186 (1.3777)	0.0122	(2)
	VIX, vol^{OP}	0.3141 (10.7989)*	-0.0393 (-0.3850)	0.0184 (1.3593)	0.0082	(4)
樣本二 (二〇〇三年)	HV, vol^{OP}	0.0852 (6.5998)*	0.5997 (10.9426)*	0.0223 (2.1655)*	0.3318	(2)
	GV, vol^{OP}	0.0670 (4.0024)*	0.5889 (9.4344)*	0.0203 (1.8892)	0.2705	(4)
	IV, vol^{OP}	0.0491 (3.0033)*	0.7407 (10.7891)*	0.0210 (2.0337)*	0.3256	(3)
	VIX, vol^{OP}	0.0400 (2.5414)*	0.7670 (11.7891)*	0.0183 (1.8271)	0.3652	(1)
樣本三 (二〇〇四年一月~四月)	HV, vol^{OP}	0.2112 (6.7636)*	0.3412 (2.8562)*	0.0121 (0.2855)	0.1018	(3)
	GV, vol^{OP}	0.3514 (5.7098)*	-0.2474 (-1.0350)	-0.0029 (-0.0641)	0.0147	(4)
	IV, vol^{OP}	0.0681 (1.5951)	1.0055 (5.4500)*	0.0168 (0.4439)	0.2921	(2)
	VIX, vol^{OP}	0.0111 (0.2379)	1.2784 (6.1959)*	0.0286 (0.7860)	0.3478	(1)
全樣本	HV, vol^{OP}	0.1493 (14.1291)*	0.4339 (11.6670)*	0.0209 (2.1552)*	0.1968	(2)
	GV, vol^{OP}	0.1303 (8.1288)*	0.4555 (8.6628)*	0.0188 (1.8581)	0.1204	(4)
	IV, vol^{OP}	0.0953 (6.4800)*	0.6623 (11.9144)*	0.0191 (1.9743)	0.2034	(1)
	VIX, vol^{OP}	0.1042 (6.5913)*	0.6380 (10.4663)*	0.0186 (1.8831)	0.1653	(3)

註：以上表中 β_0 、 β_1 參數下方之括弧值為檢定參數是否異於 0 之 t-test 值，*表示在 95% 信賴水準下為顯著。

表 15：加入前一期之選擇權交易量成長率後之 R^2 成長率

		未加入交 易量之 R^2	加入交 易量之 R^2	R^2 成長率
樣本一 (二〇〇二年)	HV, vol^{OP}	0.0420	0.0410	-2.39%
	GV, vol^{OP}	0.0034	0.0111	227.77%
	IV, vol^{OP}	0.0045	0.0122	173.16%
	VIX, vol^{OP}	0.0007	0.0082	1156.27%
樣本二 (二〇〇三年)	HV, vol^{OP}	0.3191	0.3318	3.99%
	GV, vol^{OP}	0.2599	0.2705	4.07%
	IV, vol^{OP}	0.3143	0.3256	3.61%
	VIX, vol^{OP}	0.3566	0.3652	2.42%
樣本三 (二〇〇四年一月至四月)	HV, vol^{OP}	0.1008	0.1018	1.01%
	GV, vol^{OP}	0.0147	0.0147	0.38%
	IV, vol^{OP}	0.2902	0.2921	0.67%
	VIX, vol^{OP}	0.3422	0.3478	1.64%
全樣本	HV, vol^{OP}	0.2156	0.1968	-8.70%
	GV, vol^{OP}	0.1188	0.1204	1.37%
	IV, vol^{OP}	0.2262	0.2034	-10.05%
	VIX, vol^{OP}	0.1769	0.1653	-6.58%

伍、結論

CBOE (芝加哥選擇權交易所)於1973年推出買權合約，同年Black-Scholes也發表了著名的選擇權定價模型，往後衍生性金融商品也如火如荼地快速發展，然隨著金融市場的成熟與多樣化，波動度成為重要的風險衡量工具，波動度的增減代表著風險程度的高低。若能掌握波動度的變化，則可幫助投資決策的擬定。

而何種波動度預測模型能提供對未來真實波動度最好的預測能力是本文所欲瞭解的，實證對象是國內期貨市場及選擇權市場，分別使用日資料及日內資料以歷史波動度模型、GARCH模型、隱含波動度模型及CBOE新編之VIX指數模型作為未來真實波動度的預測模型，檢視不同模型之預測能力，並以MAE與RMSE衡量與真實波動度之誤差，並加入前一期之交易量，檢測是否能提高預測模型之解釋能力。而國內選擇權市場於2001年12月成立，在市場推出之第一年交易量較少，可能造成價格之不合理，故依年度區分樣本劃分為三期，就以上所述進行實證分析，由實證結果可知VIX模型之解釋能力為最高，可為真實波動度之良好預測模型，所得結論整理如下。

- 一、在選擇權市場成立初期之2002年樣本一時段，不同之波動度預測模型之解釋能力均相當低，最好之模型為歷史波動度模型對未來10日真實波動度的預測，但有低估之現象，而迴歸分析之 R^2 仍偏低僅有0.0864，而VIX則只對於30日之真實波動度有較好的解釋能力。顯示在市場不成熟的階段，隱含波動度模型與VIX模型可能因交易量偏低，而導致價格跳動之不合理，而無法獲得有效之預測能力。
- 二、於選擇權市場交易量成長快速且日均量穩定於八萬口以上之2003年樣本二，各種波動度模型預測績效均大幅提升。預測績效最佳的是VIX模型，對未來不同期間之真實波動度之預估均擁有最好之解釋能力，其中對10日、20日、30日真實波動度之 R^2 均達0.3以上，隱含波動度模型僅次於VIX模型，本文之隱含波動度模型取四個交易量較大、接近價平之買、賣權估算波動度，已對市場具有代表性。而VIX模型則是所有價外合約之買、賣權計算，則更能反應整體選擇權市場對於真實波動度的預期。
- 三、在2004年1至4月之樣本三時期，選擇權之日均量已達20萬口以上，市場已更趨於成熟，歷史波動度模型與GARCH模型預測能力仍低於VIX模型與隱含波動度模型，後兩者在交易量提升的情況下，其解釋能力更進一步的提升，但是與樣本二不同的是隱含波動度模型在對未來5日、10日真實波動度的預測能力是高於VIX模型，推論其原

因可能是在2004年3月及4月，期貨市場出現多次的漲、跌停，也引起選擇權價格未隨理論之Delta值變動，而過度偏離理論價之情形，使得以較多選擇權序列為計算基礎之VIX模型，其 R^2 低於隱含波動度模型。

- 四、就平均絕對誤差(MAE)與均方根誤差(RMSE)來看，在樣本一時段，雖然歷史波動度模型之預測能力較好，但是以隱含波動度模型之預估值與真實波動度的誤差較小。樣本二則是VIX模型誤差最小，且隨著交易量的增加，樣本二之誤差皆比樣本初期小。
- 五、加入期貨交易量為解釋變數後，僅在樣本一可以提高預測能力，但是在樣本二及樣本三則無法有效提升模型的解釋能力。此結果與Brooks(1998)的研究結果一致。在以選擇權交易量為解釋變數的話，在樣本中期，則可以小幅提升預測模型之解釋能力，各模型之 R^2 提高的幅度約有2.42%至4.07%。

由本文實證結果可知，在市場逐漸成熟之後，以CBOE新編之VIX波動度指數應用於台指選擇權市場，對於真實波動度具有最佳之解釋能力。而芝加哥選擇權交易所已成功將波動度商品化為期貨合約，即VIX期貨及變異數期貨(variance futures)，如附錄三及附錄四，提供市場對波動度風險的避險管道，國內亦可以此編制加權指數之VIX指數，待市場熟悉與認同之後，則可進一步開發與波動度相關之期貨商品，以健全國內整體金融市場。

附錄一：CBOE舊有VIX指數(VXO)之編制方式

(一)在推算S&P100指數選擇權各履約價之隱含波動度所需使用的參數在指數水準是S&P100股價指數；無風險利率是以到期日最接近選擇權到期之國庫券(T-bill)之殖利率，若選擇權到期日小於30日，則以存續期間30日的國庫券取代；選擇權價格之選取是以買、賣報價之中間值為選擇權之市價。

(二)距到期時間的調整：CBOE在計算VXO時，排除距到期日小於8日的選擇權，距到期時間則是以交易日而非日曆天為計算基礎，調整方式如下， N_t 為交易日之天數， N_c 為日曆日之天數， $\text{int}()$ 表示取整數值， σ_t 是以交易日為計算基礎之隱含波動度， σ_c 是以日曆日為計算基礎之隱含波動度。

$$N_t = N_c - 2 \times \text{int}(N_c / 7)$$

$$\sigma_t = \sigma_c \left(\sqrt{N_c} / \sqrt{N_t} \right)$$

(三)履約價的選取：履約價的選擇是取近月合約四個最接近價平的買權與賣權，以及次近月四個接近價平的買權與賣權，共計八個選擇權合約來計算隱含波動度。履約價最接近價平是指分別高於、低於現貨指數的二個序列，若現貨指數恰好等於某履約價時，則選取該履約價以及第一個低於該履約價之序列。如下表所示。

表A-1：CBOE波動度指數(VXO)選擇權序列選取表

履約價格	近月合約		次近月合約	
	Call	Put	Call	Put
$X_l (< S)$	$\sigma_{c,f1}^{X_l}$	$\sigma_{p,f1}^{X_l}$	$\sigma_{c,f2}^{X_l}$	$\sigma_{p,f2}^{X_l}$
$X_u (\geq S)$	$\sigma_{c,f1}^{X_u}$	$\sigma_{p,f1}^{X_u}$	$\sigma_{c,f2}^{X_u}$	$\sigma_{p,f2}^{X_u}$

註： X_l 為低於現貨價格之履約價， X_u 為高於現貨價格之履約價
 t_1 、 t_2 分別代表近月及次近月，其中 $t_1 < 30$ ， $t_2 < t_1$ ，須大於8日
 c 、 p 分別代表買權及賣權

(四)將同一履約價之買權與賣權隱含波動度平均，可得到四個履約價與到期期間不同之波動度。

$$\sigma_{t1}^{X_l} = (\sigma_{c,f1}^{X_l} + \sigma_{p,f1}^{X_l}) \quad \sigma_{t1}^{X_u} = (\sigma_{c,f1}^{X_u} + \sigma_{p,f1}^{X_u})$$

$$\sigma_{t2}^{X_u} = (\sigma_{c,f2}^{X_u} + \sigma_{p,f2}^{X_u}) \quad \sigma_{t2}^{X_l} = (\sigma_{c,f2}^{X_l} + \sigma_{p,f2}^{X_l})$$

(五)分別將同一月份不同履約價之選擇權波動度加權平均，權數為履約價與現貨價格之差距，依此計算後可得到兩個不同月份之選擇權波動度。

$$\sigma_{t1} = \sigma_{t1}^{X_l} \left(\frac{X_u - S}{X_u - X_l} \right) + \sigma_{t1}^{X_u} \left(\frac{S - X_l}{X_u - X_l} \right)$$

$$\sigma_{t2} = \sigma_{t2}^{X_l} \left(\frac{X_u - S}{X_u - X_l} \right) + \sigma_{t2}^{X_u} \left(\frac{S - X_l}{X_u - X_l} \right)$$

(六)最後再以選擇權距到期期間為權數，加權平均選擇權近月與次近月合約之隱含波動度，即可到一個價平且距到期期間尚有22個交易日(或30個日曆日)之隱含波動度，即為VXO波動度指數。 N_{t1} 為近月合約距到期日之交易日數， N_{t2} 為次近月合約距到期之交易日數。

$$VXO = \sigma_{t1} \left(\frac{N_{t2} - 22}{N_{t2} - N_{t1}} \right) + \sigma_{t2} \left(\frac{22 - N_{t1}}{N_{t2} - N_{t1}} \right)$$

附錄二：Volatility & Variance Swaps

(一) Volatility Swaps

在一個風險中立的環境下，一個履約價為K，實現的變異數為V的遠期契約，其價值F如下：

$$F = E \left[e^{-rt} (V - K) \right]$$

V：未來實現之變異數

K：履約價

r：無風險利率

t：到期日

E[]：取期望值

一個對買賣雙方公平的契約，其期初的價值應為零。則 K_{var} 應等於未來實現變異數之期望值。

$$K_{var} = E[V]$$

未來實現之變異數可用連續積分來表示：

$$V = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2(t, \dots) dt$$

取期望值：

$$K_{var} = \frac{1}{T} E \left[\int_0^T \sigma^2(t, \dots) dt \right]$$

(二) 調整不同履約價之權數

1. 履約價之權數

Variance vega為衡量選擇權變異數變動時，對選擇權價值的影響。就單一選擇權來看，Vega會隨股價的不同而改變。因此利用 $1/K^2$ 為權數，將選擇權所有履約價加權的投資組合，該組合之vega將不會隨股價變動而改變。求出之vega會是一個常數，推導如下：

$\Pi(S)$ 代表當股價為 S 時的選擇權資產組合：

$$\Pi(S) = \int_0^{\infty} \rho(K) O(S, K, v) dK$$

$O(S, K, v)$ 表示一個 Black-Scholes 選擇權，其履約價為 K ，當股價為 S 時，總股價報酬的變異數為

$$v = \sigma^2 \tau$$

而資產組合中個別選擇權 $O(S, K, v)$ 對於股價報酬變異數 v 變動的敏感度為：

$$v_O = \tau \frac{\partial}{\partial v} (O) = \tau S f\left(\frac{K}{S}, v\right)$$

其中：

$$f(S, K, v) = \frac{1}{2\sqrt{v}} \frac{\exp(-d_1^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \quad d_1 = \frac{\ln(S/K) + v/2}{\sqrt{v}}$$

整個資產組合 $\Pi(S)$ 對於股價報酬變異數 v 變動的敏感度如下：

$$V_X(S) = \tau \int_0^{\infty} \rho(K) S f\left(\frac{K}{S}, v\right) dK$$

對 S 微分，求 V_{Π} 對於股價 S 變動的敏感度如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{\Pi}}{\partial S} &= \tau \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial S} [S^2 \rho(xS)] f(x, v) dx \\ &= \tau \int_0^{\infty} S [2\rho(xS) + xS\rho'(xS)] f(x, v) dx \end{aligned}$$

其中： $x = \frac{K}{S}$ ，並將積分變數由 K 改變為 x

若希望資產組合的 $\text{vega}(V_{\Pi})$ 不受股價變動影響

$$\text{，則須令 } \frac{\partial V_{\Pi}}{\partial S} = 0$$

$$\text{即 } 2\rho + K \frac{\partial \rho}{\partial K} = 0$$

$$\text{則 } \rho = \frac{\text{const}}{K^2}$$

2. 應持有之單位

在選擇權市場上，價外選擇權較價內選擇權交易量大，更具有流動性，故用一指標股價 (S^*) 作為價外、價內選擇權的分界，當履約價小於指標股價時，採用價外賣權，當履約價大於指標股價時，採用價外買權。

所以假設一投資組合 Π 可表示如下：

$$\Pi(S, S^*, \sigma \sqrt{\tau}) = \sum_{K > S^*} \frac{1}{K^2} C(S, K, \sigma \sqrt{\tau}) + \sum_{K < S^*} \frac{1}{K^2} P(S, K, \sigma \sqrt{\tau})$$

以 Black-Scholes 公式加總後，可得：

$$\Pi(S, \sigma \sqrt{\tau}) = \frac{S - S^*}{S^*} - \log\left(\frac{S}{S^*}\right) + \frac{\sigma^2 \tau}{2}$$

S 為時點為 t 的股價

在到期日 T 時，則該組合之損益結構如下：

$$\Pi(S, \sigma \sqrt{\tau}) = \frac{S_T - S^*}{S^*} - \log\left(\frac{S_T}{S^*}\right)$$

S_T 為時點為到期之股價

在相同的股價下，到期前和到期時的價值僅有 $\frac{\sigma^2 \tau}{2}$ 的差異，故該投資組合 Π 的 variance vega 為 $\frac{\sigma^2 \tau}{2}$ 。

故若持有單位 $\frac{2}{T}$ 的 Π ，則當 variance vega 變動 1%，而的投資組合的價值會變動 1。

(三) 用 log contract 交易波動度

假設利率、股利為零，而 σ_I 是估計的未來波動度，在 t_0 期時，上述的投資組合 Π 的價值可表示為：

$$\Pi_0 = \frac{2}{T} \left[\frac{S_0 - S^*}{S^*} - \log\left(\frac{S_0}{S^*}\right) \right] + \sigma_I^2$$

在到期的時候，若實際發生之波動度為 σ_R ，則在 t_0 期 Π 的真正價值應為：

$$\Pi_0 = \frac{2}{T} \left[\frac{S_0 - S^*}{S^*} - \log\left(\frac{S_0}{S^*}\right) \right] + \sigma_R^2$$

對 log 項連續避險至到期的話，則投資組合的淨利為 $1 * (\sigma_R^2 - \sigma_I^2)$ ，可以將不確定之風險 σ_R^2 轉為固定風險之 σ_I^2 。

(四) 使用 log contract 所面臨的限制：

1. Black-scholes 模型假設波動度為固定
2. Black-Scholes 模型假設利率、股利率為零。
3. 選擇權必須有零到無窮大的履約價。

(五) 以一般化假設複製 variance swaps

唯一的假設：股價的變動為連續，無跳空之現象。

幾何布朗動態過程

$$dS = (S\mu)dt + (S\sigma)dZ_t$$

Ito's lemma

$$d \log S_t = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dZ_t$$

兩式相減

$$\frac{dS}{S} - d \log S_t = \frac{\sigma^2}{2} dt$$

變異數V表示如下：

$$\begin{aligned} V &\equiv \frac{1}{T} \int_0^T \sigma^2 dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \log \frac{S_T}{S_0} \right] \end{aligned}$$

取期望值後， K_{var} 表示如下：

$$K_{var} = E(V) = \frac{2}{T} \left[E \left(\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} \right) - E \left(\log \frac{S_T}{S_0} \right) \right]$$

K_{var} 的第一項表示如下：

$$E \left(\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} \right) = E \left[\int_0^T r dt + \sigma dZ_t \right] = rT$$

K_{var} 的第二項表示如下

$$E \left[\log \frac{S_T}{S_0} \right]$$

市場上無 log contract 可供交易，故第二項 $E \left[\log \frac{S_T}{S_0} \right]$ 須由複製法求得，引進一個新參數 S_* ，是介 S_0 於 S_T 與之間，再將 $\log \frac{S_T}{S_0}$ 拆成兩項如下：

$$\log \frac{S_T}{S_0} = \log \frac{S_T}{S_*} + \log \frac{S_*}{S_0}$$

第一項 $\log \frac{S_T}{S_*}$ 是一個定值 $\log \frac{S_T}{S_*}$ ，而則必須複製，可將其拆成兩個部份如下，一部份是線性，可由遠期契約複製，另一部份為有曲度的二項式，可由選擇權複製，並給予各履 $\frac{1}{K^2}$ 約價的權數，表示如下：

$$-\log \frac{S_T}{S_*} = \frac{S_T - S_*}{S_*} + \int_0^{S_*} \frac{1}{K^2} \text{Max}(K - S_T, 0) dK + \int_{S_*}^{\infty} \frac{1}{K^2} \text{Max}(S_T - K, 0) dK$$

將 K_{var} 的第一項與第二項相加後，可得等式如下：

$$K_{var} = \frac{2}{T} \left(rT - \left(\frac{S_0}{S_*} e^{rT} - 1 \right) - \log \frac{S_*}{S_0} + e^{rT} \int_0^{S_*} \frac{1}{K^2} P(K) dK + e^{rT} \int_{S_*}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(K) dK \right)$$

所面臨的問題：

1. 若有 volatility skew 的情況下，所求得之公平履約價將比沒有 volatility skew 的情況下來得大。
2. 履約價的間隔越小，則效果越好。
3. 履約價過少，將有低估的現象。
4. 若股價出現跳空的現象，將公平履約價的估計失真。

(六) CBOE新編VIX指數之公式

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2$$

其中： $VIX = \sigma \times 100$

T：距到期時間(分)

F：遠期指數水準

K_i ：第i個價外選擇權的履約價

$$\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$$

K_0 ：低於遠期指數水準的第一個履約價

R：無風險利率

$Q(K_i)$ ：履約價 K_i 契約的買賣價中間值

上述中，F的算法需先計算出同履約價 (Strike Price) 的買權價格 (Call Price) 和賣權價格 (Put Price)，其差價最小者，再帶入下式：

$$F = \text{Strike Price} + e^{RT} \times (\text{Call Price} - \text{Put Price})$$

資料來源：

Kresimir Demeterfi、Emanuel Derman、Michael Kama、Joseph Zou (1999), "More Than You Ever Wanted To Know About Volatility Swaps", Goldman Sachs *Quantitative Strategies Research Notes*

附錄三：CBOE 波動度指數（VIX）期貨契約規格

表A-2：CBOE 波動度指數(VIX)期貨契約規格

契約名稱	Volatility Index (VIX) Futures- 波動度指數(VIX)期貨
上市交易日期	2004年3月26日
交易標的	VBI指數(Increased-Value Index)，即VIX指數乘以10倍
契約價值	100美元乘以VBI指數
契約月份	連續兩個近月，加上二個最近季月(以2月開始循環，即2月，5月，8月，11月)
交易時間	中部標準時間(芝加哥時間) 8：30 a.m.~3：15 p.m.
交易平台	CBOE <i>direct</i>
交易代碼：	Volatility Index ~ VIX Increased-Value ~ VBI VIX Futures ~ VX
最小跳動點	VBI指數0.1點，即10美元
最後交易日	到期月份第3個星期二
結算日	到期月份第3個星期三
交割方式	現金交割
結算價：	以結算日VIX指數之特別開盤價(Special Opening Quotation - SOQ) 乘以10為結算價；如有任何序列之選擇權契約在開盤時段沒有成交，則以該序列買、賣價之平均值作為開盤價
部位限制	5000口
保證金	投機部位之原始保證金為3,750美元，維持保證金為3,000美元；避險部位之原始保證金為3,000美元，維持保證金同為3,000美元；跨月份同商品價差交易之投機部位原始保證金為50美元，維持保證金為40美元；跨月份同商品價差交易之避險部位原始、維持保證金同為40美元(CFE公佈於2004年3月12日)

資料來源：CBOE(芝加哥選擇權交易所)

附錄四：CBOE S&P500三個月期變異數期貨契約規格

表A-3：CBOE S&P500三個月期變異數期貨契約規格

契約名稱	S&P500 Three-Month Variance Futures - S&P500 三個月期變異數期貨
上市交易日期	2004 年 5 月 18 日
交易標的	S&P500 指數三個月期之真實變異數 (realized variance)
契約報價	真實變異數乘以 10,000 倍，例如所計算之真實變異數之值為 0.05875，則契約報價則為 587.5
契約價值	50 美元乘以契約報價，例如當變異數期貨契約報價為 587.50，則契約價值為美金 29,375 元 (587.5 × \$50)
契約月份	以三月開始循環之季月(即 3 月，6 月，9 月，12 月)
交易時間	中部標準時間(芝加哥時間) 8 : 30 a.m. ~ 3 : 15 p.m.
交易平台	CBOEdirect
交易代碼	CBOE S&P500 Three-Month Variance Futures - VT
最小跳動點	契約報價 0.5 點，即 25 美元
最後交易日	到期月份第 3 個星期四
結算日	到期月份第 3 個星期五
交割方式	現金交割
結算價	真實變異數以假設每日報酬平均數為零，並乘以 252 將變異數年化，最後再將計算出之數值乘以 10,000 即為最後結算價，公式如下頁。用於計算三個月期變異數之S&P500 指數數列，在第一天與最後一日是以特別開盤價 (Special Opening Quotation- SOQ)、其餘是以每日收盤價作為計算基礎。
部位限制	5000 口
保證金	投機部位之原始保證金為 12,500 美元，維持保證金為 10,000 美元；避險部位之原始保證金為 10,000 美元，維持保證金同為 10,000 美元；價差交易部份可參閱 CFE Regulatory Circular RG04-05 (CFE 公佈於 2004 年 6 月 4 日)

資料來源：CBOE(芝加哥選擇權交易所)

$$\text{Realized Variance} = 252 \times \left(\sum_{i=1}^{N_a-1} R_i^2 / (N_e - 1) \right)$$

$R_i = \ln(P_{i+1} / P_i)$ S&P500 指數之報酬

P_i = 每日之 S&P500 指數

N_e : 須要用於計算 S&P500 指數每日報酬之天數

$N_e - 1$: 計算真實變異數之每日報酬個數

N_a : 實際用於計算真實變異之報酬個數，正常情況下

$N_a = N_e$ ，但若在三個月期間內出現市場中斷事件 (Market Disruption Event)，則當日之 S&P500 指數將不列入計算，則 N_a 將會小於 N_e 。

市場中斷事件：即 Market Disruption Event，當市場出現突發事件導致在交易日中發生暫停或限制交易之情況，由 CFE (CBOE 期貨交易所) 決定之。

參考文獻

1. Anthony, J., (1988), "The interrelation of stock and options market trading volume data", *Journal of Finance*, vol 43, pp949~964.
2. Black, F. and M. Scholes, (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81 : 3, 637-54.
3. Black, F. (1976), "Studies of Stock Price Volatility Changes, Proceedings from the American Statistical Association", *Business and Economics Statistics Section*, 177-181.
4. Bollerslev, T., (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
5. Brooks, C., (1998), "Predicting Stock Index Volatility: Can Market Volume Help?", *Journal of Forecasting*, 17, 59-80.
6. Canina, L. and S. Figlewski, (1993), "The Informational Content of Implied Volatility", *The Review of Financial Studies*, 6 : 3, 659-681.
7. Chen, N. F., Cuny, J. C. & Haugen, A. R. (1995), "Stock Volatility and the Levels of the Basis and Open Interest in Futures Contracts", *The Journal of Finance*, Vol.12, No.1, pp.281-300.
8. Chiras, D. P. and S. Manaster, (1978), "The Information Content of Option Prices and a Test of Market Efficiency", *Journal of Financial Economics*, pp213-234.
9. Christensen B.J. and N. R. Prabhala (1998), "The Relation between Implied and Realized Volatility", *Journal of Financial Economics*, vol. 50, 125-150.
10. Claessen, H. and Mittnik, S., (2002), "Forecasting stock market volatility and the informational efficiency of the DAX-index options market", *The European Journal of Finance*, vol 8, pp302~321.
11. Cox, J., S. Ross, and M. Rubinstein, (1979), "Option Pricing: A New Approach", *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, pp.229-264, October.
12. Day, T. E. and C. M. Lewis (1993), "Forecasting Futures Market Volatility", *Journal of Derivatives*, 1, 33-50.
13. Engle, R., (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation", *Econometrica* 50, pp.987-1108.
14. Epps, T.W. (1975), "Security Price Changes and Transaction Volumes: Theory and Evidence", *American Economic Review* 65:586-597.
15. Fleming, J., B., Ostdiek, and R., E., Whaley, (1995), "Predicting Stock Market Volatility: A New Measure", *Journal of Futures Markets*, 15, 265-302.
16. Fleming, J. (1998), "The Quality of Market Volatility Forecasts Implied by S&P100 Index Options Prices", *Journal of Empirical Finance*, 5, 317-345.
17. Gemmill, G., (1986), "The forecasting performance of stock options on the London Traded Options Market", *Journal of Business Finance and Accounting*, vol 13, pp535~546.
18. Gwilym, O. A. and Buckle, M., (1999), "Volatility forecasting in the framework of the option expiry circle", *European Journal of Finance*, vol 5, pp73~94.
19. Harvey, C.R.; and R. E. Whaley (1991), "S&P100 Index Option Volatility", *The Journal of Finance*, 46 : 4, 1551-1561.
20. Jorion, P. (1995), "Predicting Volatility in Foreign Exchange Market", *Journal of Finance* Vol.50, 507-528.
21. Karpoff, J., (1987), "The relation between price changes and trading volume: a survey", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol 22, pp109~123.
22. Kim, O. and R. Verrecchia, (1994), "Market Liquidity and Volume Around Earnings Announcements", *Journal of Accounting and Economics*, Vol. 17, pg. 41-67.
23. Lamoureux, C. G. and W. D. Lastrapes (1993), "Forecasting Stock-Return Variance: Toward an Understanding of Stochastic Implied Volatility", *The Review of Financial Studies*, 6 : 2, 293-326.
24. Latane, Henry A., and Richard J. Rendleman, Jr., (1976), "Standard deviations of stock price ratios implied in options price", *Journal of Finance*, 31, 361-381.
25. Mandelbrot, B., (1963), "The Variation of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, 36, pp. 394-419.
26. Szakmary Andrew, Evren Ors, Jin Kyoung Kim, Wallace N. Davidson (2002), "The predictive power of implied volatility : Evidence from 35 futures market", *Journal of Banking & Finance*, 27, 2151-2175.
27. Whaley, Robert E., (1981), "On the valuation of American futures options: Theory and empirical tests", *Journal of Financial Economics*, 9, 127-150.
28. Whaley, R., E., (1993), "Derivatives on Market Volatility: Hedging Tools Long Overdue", *Journal of Derivatives*, 1, 71-84.
29. Whaley, R., E. (2000), "The Investor Fear Gauge", *Journal of Portfolio Management*, 26, 12-17.