

選擇權定價理論文獻的回顧

◆ 東吳大學國際貿易系所
教授兼主任

● 張大成

摘要

本文詳細的介紹不同簡單選擇權 (plain vanilla options) 之定價模型，其中包括：歐式買權 (European call option)、歐式賣權 (European put option)、美式買權 (American call option) 與美式賣權 (American put option) 等四種，於既有文獻中，例如：Black and Scholes (1973)，Merton (1973)，僅能求得前三種選擇權的計價公式，可是對於美式賣權的計價公式卻一直無法求得明確解 (closed form solution)。因此學者們都是採用數值模擬的方式進行對美式賣權解值的刻畫。本文於第五節裡介紹不同的模擬方式；同時，並比較不同方法之優缺點。

壹、前言

自從1997年9月國內首檔認購權證 (call warrant) 發行、同年12月史丹福大學的休司 (Scholes) 與哈佛大學的默頓 (Merton) 兩位教授獲得諾貝爾經濟學獎之桂冠之後，台灣的衍生性金融商品市場亦隨之蓬勃發展，2003年台灣期貨交易所又推出股票選擇權 (stock option) 及指數選擇權，以及允許券商發行認售權證 (put warrant)，可以想像未來衍生性金融商品的發展將更具空間。所謂的衍生性金融商品是指由某些特定的金融商品，例如：股票 (stock)、外匯 (foreign currency)、債券 (bond) 等等，所衍生而成的金融商品 [例如：期貨 (futures)、選擇權 (option)、認股權證 (warrant)、互換 (swap) 等等]。

相信學者們都贊成對於選擇權定價理論影響最深遠的文章，應屬Black與Scholes於1973年在政治經濟期刊所發表的選擇權定價公式；¹同年，Merton亦於貝爾經濟與管理科學期刊完整地介紹選擇權價值的合理範圍、定價模式、及許多有趣的應用。他們主要的論點在於：如果存在一完美的金融市場那麼透過投資者不斷套利的行為，最終市場將不再存在套利機會，此時，選擇權的價格即為其合理價格。此一價格決定理論不同於傳統經濟學所認為的供需均衡之價格決定理論。而後續的許多學者更將此一無套利條件的價格決定理論應用於其他金融商品，例如：債券的定價 (pricing of bond)、保險費率的計算 (pricing of insurance) 抵押貸款之定價 (pricing of collateralized loan) 及租賃定價 (pricing of leases) 等等，Smith (1979) 對相關文獻有精彩的回顧。

本文主要目的在於：介紹簡單選擇權的特性及其定價模式。除了本節緒論外，第二節將簡單地介紹不同選擇權的型態，其中包括歐式買權、歐式賣權、美式買權及美式賣權等四種。第三節則說明選擇權定價模型的假設，並舉一個簡單的例子，據以說明歐式買權的定價精神。第四節則詳細地說明Black and Scholes (1973) 及Merton (1973) 對於上述四種選擇權定價公式的推導。然而截至目前為止，僅有前三種選擇權的定價公式有明確解 (closed form solution)，而對於美式賣權的明確公式卻仍然無法求得。因此，第五節裡我們將介紹既存文獻中的五種數值模擬方法，進行對美式賣權解值的 (漸近) 求算；同時，並比較不同方法之優缺點。最後，則為本文結論。

貳、金融選擇權簡介

選擇權是衍生性 (derivative) 商品的一種，為一定型化契約，持有人有權利但無義務在未來特定日期之前，以契約上的價格買入 (或賣出) 一定數量的特定商品或金融商品 (例如：IBM股票)。一般來說，選擇權的類型，可按買入或賣出的權利畫分為：(1). 買入選擇權 (call options)：該選擇權給予買方在未來某一特定的時間，以一定的價格買入某一特定資產的權利，此一價格即為執行價格 (exercise price)，而買方可依據市場情況決定是否履行該契約。(2). 賣出選擇權 (put options)：該選擇權給予買方在未來某一特定的時間，以一定的執行價格賣出某一特定資產的權利，同樣地，買方可依據市場情況決定是否履行該契約。

另外，若以執行時間區分，則可分為：(1). 歐式選擇權 (European options)：此類選擇權規定持有人僅能在到期日當天執行該權利。(2). 美式選擇權 (American options)：此類選擇權准許持有人在發行日後及到期日前任何一天，均可執行該選擇權。上述兩種選擇權雖然名為歐式與美式，但並無地理上的意義。近幾年來無論在美國或歐洲，所交易的選擇權大多以美式為主。

根據此一定義可知，歐式與美式選擇權之差異在於：擁有美式選擇權的投資者可以選擇在到期日前的每一天執行該權利，而歐式選擇權則否。也正因為美式選擇權具有此一提早執行 (early exercise) 的權利，因此，其價值應不低於歐式選擇權。準此，我們可以將上述不同條件之選擇權區分為：歐式買權 (European call option)、歐式賣權 (European put option)、美式買權

(American call option)及美式賣權(American put option)等四種，它們的價格或稱為權利金(premium)，分別以 c 、 p 、 C 及 P 表示。1997年諾貝爾經濟學獎得主的主要貢獻之一便是在於求算上述簡單選擇權(plain vanilla options)的價格。

儘管目前在市場上交易的選擇權有許多新奇選擇權(exotic options)，它們的交易條件、型態，都不同於前述之簡單選擇權，例如：亞洲選擇權(Asian options)，彩虹選擇權(rainbow options).....等等。然而，這些不同的新奇選擇權基本上仍是簡單選擇權的變形。²因此下文我們僅將介紹上述四種簡單選擇權的定價模型。

參、基本假設與一個例子

本節中將先介紹本文分析之基本假設，接著再進行相關模型推導與說明。

一、資本市場是一完美的市場(perfect market)，亦即我們不考慮所有交易過程之交易成本，例如：手續費、證交稅等等，且融資融券都是被允許的，交易時間是連續的，所有的交易標的都可以無限地分割等等。

二、市場投資人所面臨之借貸利率(r)皆相同，且於分析期內為常數。

三、標的物資產價格，例如：IBM股票價格，在時間過程中為一隨機過程，我們假設其為具漂浮項之幾何布朗運動(geometric Brownian motion)即：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (1)$$

其中： S_t 為標的物資產價格， μ 則為標的物價格每單位時間的預期報酬率， σ 為衡量標的物價格波動(volatility)程度之參數， z 為一Wiener過程(Wiener process)，即： $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$ ， ε 為一標準常態分配， $E(\varepsilon) = 0$ ， $\text{Var}(\varepsilon) = 1$ ，因此， $E(dz) = 0$ ， $\text{Var}(dz) = dt$ 。

四、在分析期間假設任何證券皆不發放股利(dividend)。

五、資本市場上不存在套利的機會。

在進入正式分析以前，我們先利用Cox, Ross and Rubinstein(1979)的兩期二元樹狀(binomial trees)來說明無套利情況下，歐式買權(c)的價格決定：假設某一股票每股價格在期初為100元，期末股價則可能為110或90元，其對應的買權之執行價格(exercise price, K)為105元，且市場無風險利率為5%。準此，我們可將股價及該買權價格以樹狀的方式繪於

圖1；其中，期末的買權價值之計算如下：當股價為110時，則持有人執行此一權利可獲利5元(買入105，賣出110)，不執行則無利無損，因此該持有人將會採行執行策略。反之，若股價為90時，則執行將損失15元(買入105，賣出90)，而不執行則無利無損，因此該持有人將不會執行此一選擇權。而更進一步的問題在於期初的買權價格(C_0)如何決定？底下我們將逐步地回答此一問題。

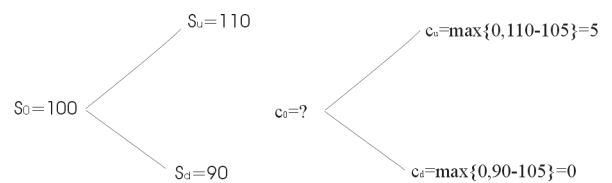


圖1：二元樹狀買權定價

首先，先建構一無風險的投資組合(portfolio)，在期初時買入 Δ 股的股票，且賣空(融券)一單位的買權，則此一組合的成本為： $\Delta S_0 - c_0 = 100\Delta - c_0$ ，則當 $S_1 = 110$ 時，此一組合之價值為 $110\Delta - 5$ ；當 $S_1 = 90$ 時，價值為 $90\Delta - 0$ ；令 $110\Delta - 5 = 90\Delta$ ，解得 $\Delta = 0.25$ 。該涵義為若期初買入0.25股股票且賣空1單位的買權，則不論期末股價如何變動，此一組合的價值皆為 $110 \times 0.25 - 5 = 90 \times 0.25 = 22.5$ ，因此，該投資組合我們稱之為無風險的投資組合(riskfree portfolio)。

其次，進一步地考慮無套利條件(no arbitrage condition)則便可解得期初之買權價格(C_0)。我們的說明如下：由於該無風險資產組合在期末時可以確定有22.5元的價值，而期初的成本為： $100 \times 0.25 - C_0$ 。因此，在無套利的情況下，期初成本並加上無風險利息，必須等於期末確定的22.5元，即 $(25 - C_0)(1 + 0.05) = 22.5$ ，否則將會有套利的機會。進而，可解得： $C_0 = 3.751$ 。此一解值即為該買權在期初的合理售價(或買價)，也就是其權利金(premium)價值。

透過上述簡單的例子可以清楚的了解買權權利金決定過程中，無風險資產組合及無套利條例所扮演的角色，接下來我們將利用上述觀念，但以更嚴謹的方式，求算第二節裡介紹的四種簡單選擇權的權利金決定。

肆、簡單選擇權之定價

本節中將說明不同型態之簡單選擇權的不同特性，據以說明其不同的邊界條件(boundary condition)，並計算其合理價格。首先，我們先求導出簡單選擇權的一般式，令 $F(S, t)$ 為選擇權(它可是上述四種簡單選擇權的任何一種)，在第 t 期，且標的物資產價格為 S_t 時的權利金。由假設3可知 S_t 服從一幾何布朗運動(geometric Brownian motion)，由此，利用Ito's lemma可得：

$$dF(S, t) = [\mu S \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{\partial F}{\partial t}] dt + \sigma S \frac{\partial F}{\partial S} dz \quad (2)$$

接著，與前節分析相同，我們亦將建構一無風險投資組合，其中包括：買入 $\partial F / \partial S$ 股的股票，且賣空(融券)一單位的選擇權，則此一資本組合之成本 π 為：

$$\pi = \frac{\partial F}{\partial S} S - F(S, t) \quad (3)$$

而此一成本於單位時間(dt)內的變動量為：

$$d\pi = \frac{\partial F}{\partial S} dS - dF(S, t) \quad (4)$$

進一步地，將(1)、(2)兩式代入(4)式，可得：

$$d\pi = -(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2}) dt \quad (5)$$

需注意的是，由上式可以看出此一組合的價值變動($d\pi$)，並沒有 dz 項，即該組合為一無風險的投資組合。

同時，在無套利條件的規範下，該無風險投資組合在單位時間內之價值變動($d\pi$)，必須等於其本金在相同時間內所可能獲得無風險的利息收入，否則將會有套利的機會。準此，此一無套利條件可表為：

$$d\pi = r\pi dt \quad (6)$$

其中， r 為無風險利率(riskfree interest rate)，將(3)式及(5)式代入(6)式，則可得：

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + rS \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{\partial F}{\partial t} - rF = 0 \quad (7)$$

上式即為Black and Scholes (1973)所推導的選擇權定價之偏微分方程式(partial differential equation, PDE)，其中 $F(S, t)$ 可以是四種簡單選擇權的任何一種。如果我們再考慮不同選擇權之特性，推演其邊界條件(boundary condition)，那麼便可求得選擇權之合理價格(即： $F(S, t)$)。

一、歐式買權(European call option,)的評價：

歐式買權是指持有人有權利(但沒有義務)，僅可以在到期日(T)時，要求以某一事先約定的執行價格購買某一特定的資產。因此，其邊界條件可以下列諸式表示：

$$c(S, T) = \max\{0, S_T - K\} \quad (8a)$$

$$c(0, t) = 0 \quad (8b)$$

$$0 \leq c(S, t) \leq S_t \quad (8c)$$

(8a)式是指當到期日時，若股價(S_t)高於執行價格(K)時，則持有人應馬上執行買權(成本為 K ，但可售 S_t)，獲利了結。反之 $S_t < K$ ，則不應執行該買權。(8b)式則說明 t 期的股價為零時，則該買權權利金亦應為零；同時(8c)式則規範每期買權權利金不低於零，且不得高於當期股價。

準此，我們可以透過變數轉換，將(7)式改寫成物理學的Heat方程式(Heat equation)，並配合(8)式的邊界條件，便可求得合理之權利金價格如下：

$$c(S, t; K, \sigma, r) = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2) \quad (9)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2) \cdot (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}} = d_2 + \sqrt{T-t}$$

$$N(d) = \int_{-\infty}^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-q^2/2} dq$$

$N()$ 為標準常態分配的累積密度函數，上式即為著名的Black and Scholes option pricing equation或稱Black and Scholes Formula，若以圖形表示，則如圖2所示：

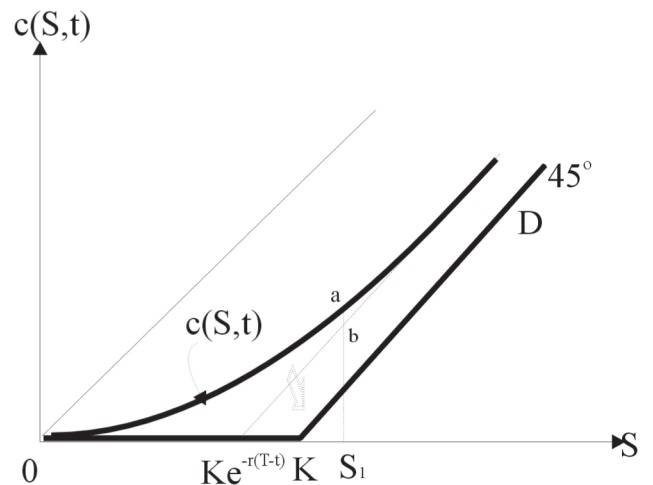


圖2：歐式買權之合理價格

圖中，當到期日(T)來臨時，則選擇權的價值為OKD折線，而在到期日前的任一時點，其價值 $c(S, t)$ 為曲線，例如：當股價為 S_1 時，該歐式買權的合理權利金為 aS_1 元，其中 ab 距離稱為該買權的時間價值(time value)，而 bS_1 距離，則為買權真實價值(intrinsic value)。換言之，歐式買權的價值包括了時間價值與真實價值兩部份。而隨著到期日的逼近，買權的時間價值將逐漸降低，終至零為止。申言之，隨著到期日的來臨(t 向逼近 T)， $c(S, t)$ 曲線會逐漸地向OKD折線逼近，如圖中之箭頭所示。

二. 歐式賣權(European put option,)的評價

同樣地，歐式賣權是指持有人僅可以在到期日決定是否執行該權利，因此，其邊界條件可以下列式子描述：

$$p(S, T) = \max\{0, K - S_T\} \quad (10a)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} p(S, t) = 0 \quad (10b)$$

$$p(0, t) = Ke^{-r(T-t)} \quad (10c)$$

(10a) 式是指當到期日(T)時，若市場股價(S_T)低於執行價格(K)時，賣權持有人將馬上執行賣權(成本為 S_T ，但可售 K)，賺得 $K - S_T(>0)$ 的利潤，但若 $K < S_T$ 時，則理性的投資人將不會執行該權利。(10b) 式則說明若股價遠高於執行價格(即： $S_t \rightarrow \infty$)時，則該買權的價值為零，因為執行的成本遠超過利得，因此沒有投資人願意持有該買權。反之，如(10c)式所示，若當股價為零時，則持有人可以馬上在市場上不花任何的成本獲得一股的股票，並於到期日時(T)，執行此一賣權獲得執行價格(K)的收入，而將此一收入再透過無風險利率(r)折算回當期，其金額為 $Ke^{-r(T-t)}$ 。

同樣地，將(7)式的PDE，透過變數轉換成Heat方程式，並考慮(10)式的三個邊界條件，則可解得歐式賣權的價格為：

$$p(S, t; K, \sigma, r) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \quad (11)$$

其中： d_1, d_2 及 $N(\cdot)$ 之定義見前文所述。若以圖形表示則為：

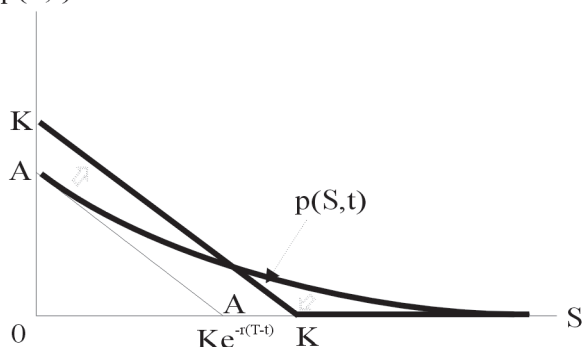


圖3：歐式賣權之合理價格

圖3中，曲線 $p(S, t)$ 為該賣權的價值，而AAS折線則為其在 t 期的真實價值(intrinsic value)，而兩者差異則為賣權的時間價值(time value)，而隨著時間向到期日(T)的來臨，曲線 $p(S, t)$ 及AAS折線都將會向KKS折線逼近，如箭頭所示，同時，時間價值亦將逐漸減少；而達到期日時，該賣權的價值即為KKS折線，且其時間價值為零。

三. 美式買權(American call option, C)的評價

誠如前文一再述及：美式與歐式選擇權間，唯一的差異在於前者可以在到期日前的任何一天執行該權利，而後者則僅能在到期日才可以執行。準此，可知美式選擇權較歐式選擇權具有提早執行(early exercise)的好處，因此，理論上，美式買權的價格一定不低於歐式買權，即： $C(S, t) \geq c(S, t)$ 。

而Merton(1973, 頁144)，曾證明美式買權的持有者寧願將該買權在市場出售，也不會選擇提早執行，原因在於美式買權活的價值(C_{alive})高於死的價值(C_{dead})。我們的說明如下：當美式買權不執行時，其價值即為歐式買權的價值，即： $C_{alive}(S, t) = c(S, t) \geq \max\{0, S_t - Ke^{-r(T-t)}\}$ ，但其死(執行)的價值為 $C_{dead}(S, t) = \max\{0, S_t - K\}$ ，由於 $0 < e^{-r(T-t)} < 1$ ，因此可知 $C_{alive} \geq C_{dead}$ 。從而，理性的美式買權持有者將不會提早執行該買權，既然如此，那麼美式買權的價值理當等於歐式買權的價值，即 $C = c$ 。申言之，(9)式不僅是歐式買權的解值，同時亦為美式買權的解值。

事實上，此一結果亦可清楚的由圖二看出，圖二中在任一時點上，歐式買權的價值 $c(S, t)$ 總是不低於其(若可以)馬上執行的價值 $S_t - K$ ，也就是 $c(S, t)$ 曲線總是高於OKD折線。因此，即使給予歐式買權可以提早執行的權利，持有者也不願意提早執行，從而使得美式買權的價值將會等於歐式買權的價值。

四. 美式賣權(American put option, P)的評價

由前一小節的說明，我們知道美式選擇權的價值必不低於歐式選擇權，此一性質亦適用於賣權評價，即： $P(S, t) \geq p(S, t)$ 。然而，美式賣權的定價公式卻不似美式買權那麼容易可以獲得。原因在於倘若股價低於某一程度時，那麼美式賣權的持有者將會選擇提早執行此一賣權，因為提早執行其價值為： $P_{dead} = \max\{0, K - S_t\}$ ，而若繼續持有，則其價值為： $P_{alive} \geq \max\{0, e^{-r(T-t)}K - S_t\}$ ，同樣地， $0 < e^{-r(T-t)} < 1$ ，因此， P_{dead} 極有可能大於 P_{alive} ，也就是，美式賣權提早執行的價值極有可能高於繼續持有的價值。

此一結果可以用圖三說明，圖中可以發現當股價(S_t)低於某一水準時，歐式賣權的價值 $p(S, t)$ 會低於立刻執行的價值 $K - S_t$ ，也就是 $p(S, t)$ 曲線在某於區間中將位於KKS折線的下方，這也就說明了美式賣權持有者，選擇提早執行的原因。因此我們可以將此一式賣權的邊界條件以下列諸式示：

$$P(S, T) = \max\{0, K - S_T\} \quad (12a)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(S, t) = 0 \quad (12b)$$

$$P(S, t) \geq \max\{0, K - S_t\} \quad (12c)$$

其中(12a)及(12b)的說明請參閱歐式賣權之說明，而(12c)式則是提早執行的邊界條件。

然而，很不幸的，由(7)的PDE配合(12)式的邊界條件，並不存在一明確解值(closed form solution)，因此，文獻上多採用數值模擬(numerical analysis)的方式，進行對美式賣權解值特性之刻劃；接下來，本文將介紹幾種數值模擬的方法。

伍、美式賣權(American put option)評價的再討論

基於前節的說明，四種簡單選擇權僅有美式賣權(P)無法求得明確解，因此學者們便提出了許多不同數值模擬的方法，希望能求算美式賣權的(近似)解值。其中包括：Cox, Ross and Rubinstein(1979)二元樹狀模擬(binomial tree simulation)，Brennan and Schwartz(1977)的有限差分模擬(finite difference simulation)，Geske and Johnson (1984)的複合選擇權分析法(compound option approach)，Barone-Adesi and Whaley(1987)的二次漸近法(quadratic approximation method)及Kim(1990)的遞迴積分法(recursive integration method)，等等。在介紹上述許多不同模擬求解方法之前，首先先說明Merton(1973)所提出的一個特例。

一. 一個特例 --- Merton(1973)

Merton(1973)想要回答的問題為：若假設存在一個永無到期日的美式賣權(perpetual American put option)時，那麼該賣權的價值應如何決定？Merton認為，該賣權的持有者將會決定一臨界股價(\bar{S}_M)，若市場股價低於此一臨界股價，則執行賣權，反之則繼續持有。至於如何決定呢？他的說明如下：基於永無到期日的假設($T \rightarrow \infty$)，則(7)式的PDE可改寫成如下的常微分方程式(ODE)：

$$0.5\sigma^2 S^2 P_{SS} + rSP_S = rP \quad (7')$$

其邊界條件則為：

$$P(\infty, \infty) = 0 \quad (13a)$$

$$P(\bar{S}_M, \infty) = K - \bar{S}_M \quad (13b)$$

$$\frac{\partial P(S, \infty)}{\partial S} = 0 \quad (13c)$$

其中(13a)式的含意已於歐式賣權中說明過了，(13b)式則為當股價為無窮大時，其執行的價值為 $K - \bar{S}_M$ ，(賣出價格為 K ，買入價格為 \bar{S}_M)，(13c)式則是找尋一最適的臨界價格使得賣權價值最大的一階條件。透過簡單的ODE求解可得：

$$P(S, \infty) = \frac{K}{1+\delta} \left(\frac{1+\delta}{\delta} \cdot \frac{S}{K} \right)^{-\delta} \quad (14)$$

$$\bar{S}_M = \frac{\delta}{1+\delta} K \quad (15)$$

其中 $\delta = 2r/\sigma^2 > 0$ ，(14)式即為當 $S > \bar{S}_M$ 時之永久美式賣權的解值，(15)式則為最適之臨界股價，我們將此一結果以圖四表示。

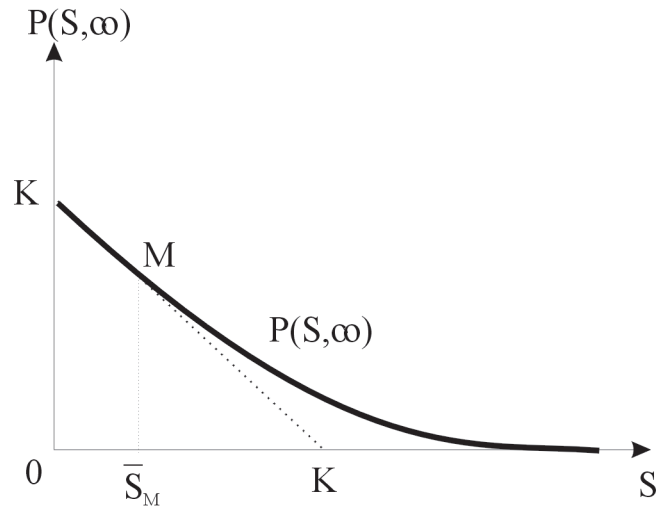


圖4：Merton (1973)之永久美式賣權解值

圖4中之粗線部分即為 $P(S, \infty)$ 之解值，M點則是 $P(S, \infty)$ 與 KK 直線之切點，該點上其斜率為負一，即：

$$\left. \frac{\partial P(S, \infty)}{\partial S} \right|_{S=\bar{S}_M} = -1 \quad (16)$$

事實上，(16)式即為一階條件(13b)與(13c)兩式的另一種表達方式，文獻上稱此一條件為超級接觸條件(super contact condition)。

二. 多期二元樹狀模擬法：

本法係由Cox, Ross and Rubinstein於1979年所提出，其模擬分析之精神已在第二節中求算歐式買權價值時提及；然而欲求算美式賣權價值有幾點必須注意，第

一、無風險投資組合(riskfree portfolio)包含買入 Δ 股的股票及買入一單位的賣權。第二、由於是採二元樹狀模擬，因此必須給定股價上升的機率 (q) 及下跌的機率 ($1-q$)，另外亦需給定下一期股價上升與下跌相對本期股價的比率，如圖5所示，其中 $u(d)$ 為股價上升(下跌)比率，因此 $S_u(S_d)$ 即為當本期股價為 S 時，下一期股價上升(下跌)的水準值。第三、在求算的過程中對於每一節點所求出的理論值，必須再與當期的執行價值 ($K - S_i$) 比較，取其大者。

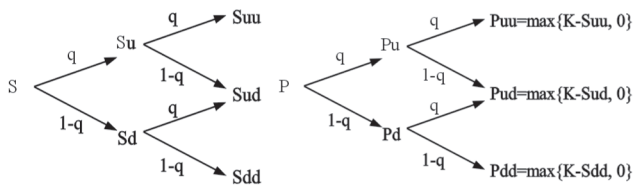


圖5：多期二元樹狀圖

接下來，就 q 、 u 與 d 的決定，當然必須與 (1) 式的股價行程相一致，而 Cox, Ross and Rubinstein (1979) 則認為應該利用 (1) 式股價行程 S 的一階動差 ($E(S + \Delta t)$)，與二階動差 ($\text{Var}(S + \Delta t)$)，來調整 q 、 u 與 d ，即：

$$E(S + \Delta t) = e^{r\Delta t} S = qSu + (1-q)Sd$$

$$\text{Var}(S + \Delta t) = S^2 e^{2r\Delta t} [e^{\sigma^2 \Delta t} - 1] = q(Su)^2 + (1-q)(Sd)^2 - [qSu + (1-q)Sd]^2$$

然而這只有兩條方程式，無法解得 q 、 c 與 d 三個未知數，因此 Cox, Ross and Rubinstein (1979) 認為為了提升模擬的效率性，因此建議採用底下的式子，因為該式可以確保股價先上後下，與先下後上有相同的股價，即： $S_{ud} = S_{du}$ ，如此在模擬多期的情況下，可以減少大量的節點。

$$ud = 1$$

因此利用上述三條方程式，即可解得 q 、 u 與 d 三個變數，如下所示：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$q = (e^{r\Delta t} - d)/(u - d)$$

底下我們利用圖5來說明本法之演算過程。首先、我們必須先模擬出標的股價的價格樹狀圖，即： $S_{i,j}$ ，。

$$S_{i,j} = S \cdot u^j \cdot d^{i-j} \quad j = 0, 1, \dots, i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

其中， i 為橫軸座標， j 為縱座標， $N = \Delta t / T$ ，當 $i=1$ 時 $S_{10} = Sd$ 及 $S_{11} = Su$ ，其餘股價依此類推。另外就美式賣權 $P_{i,j}$ 而言，在到期日 (T) 時，每一節點上的理論價值為：

$$P_{N,j} = \max\{K - S_{N,j} d^{N-j}, 0\}$$

另外根據風險中立的原則，我們可以本期賣權的價格即為下一期賣權價格期望值的折現值，其機率測度 (probability measure) 為 q 測度 (q -measure)，也就是用 q 為機率的期望值，而折現利率為無風險利率，如下式所示：

$$P_{i,j} = e^{-r\Delta t} [qP_{i+1,j+1} + (1-q)P_{i+1,j}]$$

另外，在考慮美式賣權提前執行 (early exercise) 的特性，也就是在每一個節點上，風險中立測度下的賣權期望值的現值，不能低於該賣權馬上執行的價值，因此，上式可再以下式從新詮釋：

$$P_{i,j} = \max\{K - S_{i,j} d^{i-j}, e^{-r\Delta t} [qP_{i+1,j+1} + (1-q)P_{i+1,j}]\}$$

如此，進而利用程式之撰寫，即可求得期初美式賣權的價格， $P_{0,0}$ 。在上述演算的過程中，理論上，若節點切割的愈細，則利用本法所求算出的美式賣權價格將愈準確；可是，相對的所花費的成本亦將較高。

三.有限差分模擬法：³

本法是由 Brennan and Schwartz (1977) 所提出，其作法乃是將 (7) 式的偏微分方程式 (PDE) 轉換成差分方程式 (difference equation)，並配合美式賣權之邊界條件，進行數值求解。

首先，我們假設股價存在一最高水準 (S_{\max})，同時美式賣權的到期日為 T 。則可以在股價及時間的座標平面上進行切割 (partition)，如圖6所示

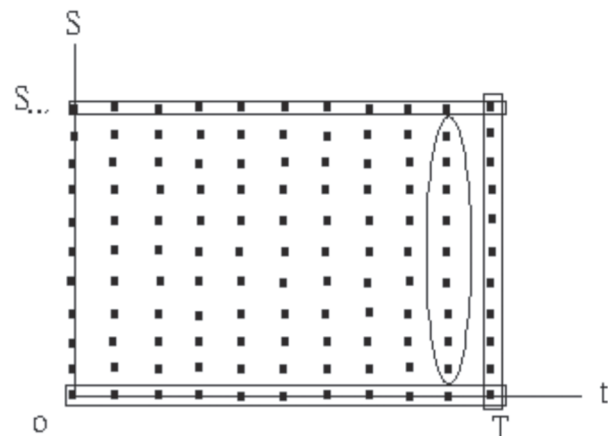


圖6：有限差分法

我們平均地把時間切成 $N+1$ 點，每一點的距離為 Δt ，即： $T = N \times \Delta t$ ，亦將股價切成 $M+1$ 點，每點的距離為 ΔS ，即： $S_{\max} = M \times \Delta S$ 。例如： $T=1, N=10$ ，則 $\Delta t = 0.1$ ； $S_{\max} = 1000$ ， $M=10$ ，則 $\Delta S = 100$ 。因此

可以在 (S, t) 平面上切割出 $(N + 1) \times (M + 1)$ 個點。於圖六上的每一個點即為不同時點，不同股價之美式買權的價值 $(P_{i,j})$ ，再將(7)式的 PDE 中的各項分別以差分的方式改寫成：

$$\frac{\partial P}{\partial S} = \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j-1}}{2\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{P_{i,j+1} + P_{i,j-1} - 2P_{i,j}}{\Delta S^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\Delta t}$$

其中 i 與 j 分別為 t 與 S 的替代變數。將以上諸式代入 PDE 中，並經過整理，同時考慮 $S = j\Delta S$ ，則可得如下的差分方程式：

$$a_j P_{i,j-1} + b_j P_{i,j} + c_j P_{i,j+1} = P_{i+1,j} \quad (7)''$$

其中：

$$a_j = 0.5rj\Delta t - 0.5\sigma^2 j^2 \Delta t \quad (17a)$$

$$b_j = 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t \quad (17b)$$

$$c_j = -0.5rj\Delta t - 0.5\sigma^2 j^2 \Delta t \quad (17c)$$

接著再將美式賣權之邊界條件改寫成差分型態：

$$P(S, T) = \max\{0, K - S_T\} \Rightarrow$$

$$P_{N,j} = \max\{0, K - j\Delta S\}, j = 0, 1, 2, \dots, M \quad (18a)$$

$$P(0, t) = K \Rightarrow P_{i,0} = K, i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (18b)$$

$$P(\infty, t) = 0 \Rightarrow P_{i,M} = 0, i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (18c)$$

其中 (18a) 為到期時，美式賣權的價值，表現於圖六上為當 $t = T$ 時的垂直線上的每一點，即圖中最右端方塊內的點。(18b) 為在任何一個時點 (i) 上，當股價為零時 ($j = 0$)，持有者馬上執行，其獲利為 K ，(買入股票價格為零，賣出價格為執行價格 K)，表現於圖六上則為水平軸 (t 軸) 上的每一點；(18c) 式則是當股價為無窮大時，此一美式賣權的價值為零 (因買入股票價格為無窮大，賣出則為 K)，即為圖六之 $S = S_{\max}$ 的水平線上的每一點。如此，我們可以得到圖六上的三條邊界條件，接下來便是要求算邊界條件裡的點 $P_{i,j}, i = 0, 1, 2, \dots, N - 1, j = 1, 2, \dots, M - 1$ 。

首先，先利用邊界條件及差分方程式求算 $P_{N-1,j}, j = 1, 2, \dots, M - 1$ ，這些解值，也就是圖六中用橢圓形圈起來的點，接著再往前向縱軸逼近一期，求算 $P_{N-2,j}, j = 1, 2, \dots, M - 1$ ；如此一直持續直到縱軸，即可求得 $P_{0,j}, j = 1, 2, \dots, M - 1$ 。這也就是美式賣權在期初對映不同股價的價值， $P(S, 0)$ 。

至於 $P_{N-1,j}, j = 1, 2, \dots, M - 1$ ，如何求算呢？我們以前述 $S_{\max} = 1000, T = 1, M = N = 10$ 的例子來說明：由於 $P_{i,j}$ 的每一點都必須滿足(7)'' 式的差分方程，因此可得如下方程組：

$$a_9 P_{9,8} + b_9 P_{9,9} = P_{10,9} - c_9 P_{9,10}$$

$$a_8 P_{9,7} + b_8 P_{9,8} + c_8 P_{9,9} = P_{10,8}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_2 P_{9,1} + b_2 P_{9,2} + c_2 P_{9,3} = P_{10,2}$$

$$b_1 P_{9,1} + c_1 P_{9,2} = P_{10,1} - a_1 P_{9,0}$$

其中， $a_j, b_j, c_j; j = 1, 2, \dots, 9$ ，可由 (17a), (17b), (17c) 求得，且 $P_{10,j}, j = 1, 2, \dots, 9$ 與 $P_{9,10}$ 及 $P_{9,0}$ 都可由邊界條件求得，因而一共有 9 (= $M - 1$) 條方程式，且有 9 (= $M - 1$) 個未知數 (即： $P_{9,9}, P_{9,8}, \dots, P_{9,1}$)，則可透過電腦程式的撰寫 (我們在本文附錄中將介紹牛頓消去法進行上述聯立方程組的求算) 求得這許多未知數的解值。須特別注意的一點是：基於美式賣權具有提早執行之特性，因此，我們必須對所求得的解值逐一檢查，若所求得的 $P_{N-1,j} < K - j\Delta S$ ，(即： $P(S, t) < K - S_t$)，也就是： $P_{9,j} < K - j \times 100$ ，則 $P_{N-1,j}$ 必須以 $K - j\Delta S$ 替代之；反之，則不用。⁴

如此求得 $P_{9,j}$ 之後，再前進一期，繼續求算 $P_{8,i}, P_{7,j}, \dots, P_{1,j}, P_{0,j}$ 。當然，求算過程必須對每一解值進行提前執行與否的檢查，如此便可求得初期的美式賣權價格， $P_{0,j} = P(S, 0)$ 。

最後要說明的是如果在 S 與 t 的平面上切的愈細，即 N 及 M 愈大，則所求得的美式賣權價格將會趨近理論值。而與多期二元樹狀一樣，亦必須在準確度與執行成本上做一取捨。⁵

四.複合選擇權分析法

本法係由 Geske and Johnson(1984)所提出，此一觀念是經由 Geske(1979)年所提出的複合選擇權(compound option) 評價之延伸。所謂的複合選擇權是指選擇權的選擇權(options on options)，例如買權的買權(a call on a call) 是指持有人有權在期以執行價格 K_1 ，取得另一個在期執行，執行價格為 K_2 的選擇權。Geske(1979)推導出二元常態累積函數(bivariate standard normal distribution function)的複合選擇權定價公式。

Geske and Johnson則將此一觀念應用於美式選擇權的評價，他們認為美式賣權的提前執行特性，就如同提供了一多期的複合選擇權，投資人每期都可以決定是否執行該權力。因此利用前述之PDE及邊界條件，並考慮複合選擇權之特性，從而可獲得美式賣權之解值為一元標準常態累積密度函數(multivariate standard normal distribution function)：

$$P(S, t) = Kw_2 - Sw_1 \quad (19)$$

$$w_1 = \{N_1 + N_2 + N_3 + \dots\}$$

$$w_2 = \{e^{-rdt}N_1 + e^{-2rdt}N_2 + e^{-3rdt}N_3 + \dots\}$$

其中 N_1, N_2, N_3, \dots 分別為一元(univariate)、二元(bivariate)、三元(trivariate).... 的標準常態累積函數。由於其為一無窮數列的解值，因此，仍須利用數值模擬進行分析。

五.二次漸進法：

此一美式賣權價格的求算是由 Barone -Adesi and Whaley(1987,1988) 所提出，他們認為由於美式賣權 $P(S, t)$ 較歐式賣權 $p(S, t)$ 有提前執行的好處，因此，前者價值應不低於後者，即： $P(S, t) \geq p(S, t)$ 。接著定義提前執行的貼水(early exercise premium)價值為 $\varepsilon(S, t)$ ：

$$P(S, t) = p(S, t) + \varepsilon(S, t) \quad (20)$$

因此， ε 亦為 S 與 t 的函數，同樣地透過 Ito's lemma 及無套利條件可得 ε 的 PDE：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \varepsilon_{SS} + rS \varepsilon_S + \varepsilon_t = r\varepsilon \quad (21)$$

同時， $\tau = T - t$ 定義 τ ，即為該賣權的存續時間，倘若 $\tau = 0$ ，則表示該賣權的到期日來臨，反之若 $\tau \rightarrow \infty$ ，則為 5-1 節所介紹之 Merton(1973)的永續美式賣權之特例。並令 $\delta = 2r/\sigma^2$ ，因此上式可以重新表為：

$$S^2 \varepsilon_{SS} + \delta \varepsilon_S - \delta \varepsilon - \frac{\delta}{r} \varepsilon_\tau = 0 \quad (21)'$$

接著令 $\varepsilon = K(\tau)f(S, K)$ ，則可得：

$$\varepsilon_S = Kf_S, \varepsilon_{SS} = Kf_{SS}, \varepsilon_\tau = K_\tau f + KK_\tau f_K$$

，因此上式可改寫為：

$$S^2 Kf_{SS} + \delta Kf_S - \delta Kf - \frac{\delta}{r}(K_\tau f + KK_\tau f_K) = 0 \quad (21)''$$

同時並 $K(\tau) = 1 - e^{-r\tau}$ 令，可得 $K_\tau = re^{-r\tau}$ ，代入上式，並除以 K ，經過整理可得：

$$S^2 f_{SS} + \delta S f_S - \frac{\delta}{K} f - (1 - K)\delta f_K = 0 \quad (21)'''$$

而由於當 $\tau \rightarrow \infty$ 時， $(1 - K) \rightarrow 0$ ；且當 $\tau \rightarrow 0$ 時 $f_K \rightarrow 0$ ，。因此，該文作者認為就美式賣權而言，在離到期日很久($\tau \rightarrow \infty$)或很接近到期日($\tau \rightarrow 0$)時，上式的最後一項都很小，因此可以被忽略，進而令該項為零。所以，上式可表為如下的常微分方程式(ODE)：

$$S^2 f_{SS} + \delta S f_S - \frac{\delta}{K} f = 0 \quad (21)''''$$

其解值則為：

$$f(S) = AS^{q_1} + BS^{q_2}$$

其中 $q_1 < 0$ 及 $q_2 > 0$ 分別為常微分方程式的兩特性根，即： $q_1 = [-(\delta - 1) - \sqrt{(\delta - 1)^2 + 4\delta/K}]/2$ ， $q_2 = [-(\delta - 1) + \sqrt{(\delta - 1)^2 + 4\delta/K}]/2$ ， A, B 則為兩待解參數。而由於 $q_2 > 0$ ，倘若股價(S)過高將會造成 $f(S)$ 發散，此一現象與美式賣權的特性(邊界條件)相違背，因此必須令 $B = 0$ 。從而可以將美式賣權之提前貼水(ε)表為：

$$\varepsilon(S, \tau) = K(\tau)f(S) = (1 - e^{-r(T-\tau)})AS^{q_1} \quad (22)$$

而倘若可以解得待解參數(A)，並將其代入(22)式，並同時考慮(20)式，則即可解得美式賣權的價格 $P(S, t)$ 。而對於待解參數求算，該文作者的處理如下：考慮底下兩條限制條件：

$$K - \bar{S} = p(\bar{S}, t) + \varepsilon(\bar{S}, t) \quad (23a)$$

$$-1 = p_S(\bar{S}, t) + \varepsilon_S(\bar{S}, t) \quad (23b)$$

其中 \bar{S} 即為 Merton(1973)所刻劃的臨界股價，(23a)式說明當股價為臨界價格時，美式賣權馬上執行的價值($K - \bar{S}$)必須等於不執行的價格，此一條件即為「等值條件」(value matching condition)。(23b)式則是執行該賣權

的最適條件，即為前文所述之「超級接觸條件」(super contact condition)。透過上兩式的限制，我們便可解得 A 與 \bar{S} 兩變數，雖然 A 與 \bar{S} 的明確解並不存在，但可透過模擬的方式求得它們的解值。再代入 (20) 式即可求得美式賣權的解值如下：

$$P(S, t) = \begin{cases} K - S_t & \text{if } S \leq \bar{S} \\ p(S, t) + (1 - e^{-r(T-t)})AS^q & \text{if } S > \bar{S} \end{cases} \quad (24)$$

值得注意的是，由於此一方法在求算提早執行貼水 (ε) 時，做了 $(1-K)\delta f_K = 0$ 的假設，因此其所求得之解值，僅為一近似值，並非理論值。而本法的優點則在於計算成本較其他方法為低，該文作者宣稱其計算成本約為有限差分法的 1/2000 倍，為複合式選擇權分析法的 1/100 倍。

六.遞迴積分法：(recursive integration)

雖然 Barone-Adesi and Whaley (1987) 提出了美式賣權執行貼水 (early exercise premium) 的觀念，可是他們所求得的解值卻僅是一漸進值 (approximation value) 而非理論值 (theoretical value)。而後，Kim (1990, 1994) 及 Carr, Jarrow and Myneni (1992)，則利用 Merton (1973) 的臨界股價 (\bar{S}) 之觀念，提出求算提前執行貼水理論解值的方法。Huang, Subrahmanyam and Yu (1996) 則利用此一分析方法，進一步地探討影響美式賣權價值的比較靜態分析。接下來，本節將介紹 Kim (1990) 的求算方法。

由於基於提前執行的特性，因此對一有限期間的美式賣權而言，在不同的時間點上其所對應的最適執行邊界 (optimal exercise boundary)，(即 Merton 的最適臨界股價) 亦不同，從而可知最適執行邊界將是存續時間 $\tau (= T - t)$ 的函數，即： $\bar{S}(\tau)$ ，同時當 $\tau \rightarrow 0$ 時， $\bar{S} = K$ ；而當 $\tau \rightarrow \infty$ 時， $\bar{S}_M = K\delta / (1 + \delta)$ ， $\delta = 2r / \sigma^2$ ，此即為 Merton (1973) 之永久美式賣權的特例。因此，接下來的問題便是如何同時求算美式買權價值 $P(S, t)$ 及最適執行邊界 $\bar{S}(\tau)$ 。

同樣地，美式賣權價格， $P(S, t)$ ，仍須服從 (7) 式 PDE 的描述，並同時考慮最適執行邊界，因此， $P(S, t)$ 的解值必須符合底下的條件：

$$P(S, T) = \max \{0, K - S_T\} \quad (25a)$$

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(S, t) = 0 \quad (25b)$$

$$\lim_{S \rightarrow \bar{S}(\tau)} P(S, t) = K - \bar{S}(\tau) \quad (25c)$$

$$\lim_{S \rightarrow \bar{S}(\tau)} \frac{\partial P(S, t)}{\partial S} = -1 \quad (25d)$$

其中 (25a) 及 (25b) 兩式的說明同 (10a) 及 (10b) 兩式。而 (25c) 及 (25d) 兩式則分別為等值條件 (value matching condition) 及超級接觸條件 (super contact condition)，兩者合稱為平滑相接條件 (smooth pasting condition 或 smooth fit condition)⁶。

Kim (1990) 求算美式賣權價格的方法，則是，利用後退解 (backward induction) 的方式，由到期日 (T) 出發，由於在到期日時其最適執行邊界 $\bar{S}(\tau=0)$ 即為該賣權的執行價格 (K)，即 $\bar{S}_0 = K$ 。從而在距到期日的前一期 ($T - \Delta t$)，該美式賣權的行為就如同歐式賣權一般，因此在 $T - \Delta t$ 期的美式賣權的價格就等於同樣到期日的歐式賣權價格，即：

$$P(S_1, \Delta t; \bar{S}_0 = K) = p(S_1, \Delta t, K) = Ke^{-r\Delta t} N(-d_2(S_1, \Delta t; \bar{S}_0)) - S_1 N(-d_1(S_1, \Delta t; \bar{S}_0)) \quad (26)$$

$$d_1(S_1, \Delta t; \bar{S}_0) = \frac{\ln(S_1 / \bar{S}_0) + (r - \sigma^2 / 2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d_2(S_1, \Delta t; \bar{S}_0) = d_1(S_1, \Delta t; \bar{S}_0) - \sigma\sqrt{\Delta t}$$

其中： $N(\cdot)$ 為標準常態累積密度函數， $S_1 = S(T - \Delta t)$ ，為在 $T - \Delta t$ 期時的股價。而 $T - \Delta t$ 期的最適執行邊界 ($\bar{S}_1 = \bar{S}(\tau = T - \Delta t)$)，則可由等值條件求得，即：

$$K - \bar{S}_1 = Ke^{-r\Delta t} N(-d_2(S_1, \Delta t; \bar{S}_0)) - S_1 N(-d_1(S_1, \Delta t; \bar{S}_0)) \quad (27)$$

如此，求得 $T - \Delta t$ 期的美式賣權價格， $P(S_1, \Delta t; \bar{S}_0)$ ，及最適執行邊界 \bar{S}_1 後，接著再向前推進一期，即： $T - 2\Delta t$ 期，而該期的美式賣權價格， $P(S_2, 2\Delta t; \bar{S}_1)$ 之求算則利用風險中立定價方式 (risk neutral pricing)⁷ 求算，即：

$$P(S_2, 2\Delta t) = \int_0^{\bar{S}_1} e^{-r\Delta t} (K - S_1) p(S_1, \Delta t; S_2) dS_1 + \int_{\bar{S}_1}^{\infty} e^{-r\Delta t} P(S_1, \Delta t) p(S_1, \Delta t; S_2) dS_1 \quad (28)$$

其中 $\phi(S_1, \Delta t; S_2)$ 為給定 $S_2 (= S_{T-2\Delta t})$ 時，經過 Δt 期後，股價為 $S_1 (= S_{T-\Delta t})$ 的條件機率密度函數；等式左邊的第一項為當 S_1 低於 \bar{S}_1 時，馬上執行該賣權的折現期望價值，折現因子為 $e^{-r\Delta t}$ ；第二項則為當 S_1 高於 \bar{S}_1 時，美式賣權繼續持有 (不執行) 時所獲得的折現期望價值。而這兩項的和即為在 $T - 2\Delta t$ 時的美式賣權價值， $P(S_2, 2\Delta t)$ 。再透過若干計算，進而可將 (28) 式改寫成

$$P(S_2, 2\Delta t) = P(S_2, 2\Delta t) + \int_0^{\bar{S}_1} e^{-r\Delta t} (K - S_1 - P(S_1, \Delta t)) \phi(S_1, \Delta t; S_2) dS_1 \quad (28)'$$

對於最適執行邊界 \bar{S}_2 ，的求算仍可利用等值條件，配合上式求得。而當求得 $T-2\Delta t$ 的 $P(S_2, 2\Delta t)$ 及 \bar{S}_2 後，再向前推進一期，即 $T-3\Delta t$ ，進而求得 $P(S_3, 3\Delta t)$ 及 \bar{S}_3 ，如此一直持續的往前推進，便可求得 $T-n\Delta t = T-\tau = t$ 期的美式賣權價格 $P(S_n, n\Delta t) = P(S_t, t)$ 及最適執行邊界 $\bar{S}(n\Delta t) = \bar{S}(\tau)$ 。最後，再取 $\Delta t \rightarrow 0$ 的極限值，便可得到 t 期美式買權價格及最適執行邊界理論值如下：

$$P(S_0, \bar{S}) = P(S, 0) + \int_0^T rK e^{-rt} N(-d_2(S, t; \bar{S}_t)) dt \quad (29)$$

$$K - \bar{S}_t = p(\bar{S}_t, t) + rK \int_t^T e^{-r(s-t)} N(-d_2(\bar{S}_t, \bar{S}_s, s-t)) ds \quad (30)$$

(29)式說明當時 $t=0$ 美式賣權的價值包括了兩部份，一是同樣條件的歐式賣權價值， $p(S, 0)$ ；另一則為美式賣權的提早執行貼水(early exercise premium)，及(29)式的積分項，此一部份即為 Barone-Adesi and Whaley(1987)所提的理論價值。另外透過(30)式即可求得 t 期的最適執行邊界，此一最適邊界若以圖形表示如下：

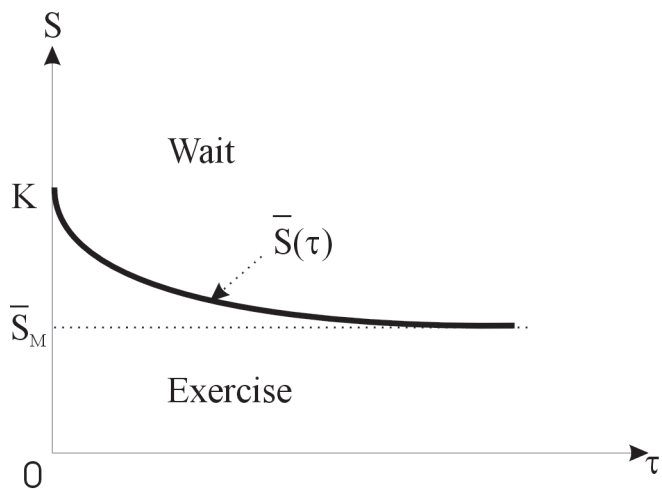


圖7：最適執行邊界 $\bar{S}(\tau)$

圖7中，橫軸為美式賣權的存活期間， $\tau = T-t$ ，若某一期的股價(S_t)低於其最適執行價格時(\bar{S})，則應馬上執行該賣權，獲利 $K - S_t$ ，反之則繼續持有，或在市場上出售。

從而，可將美式賣權的價格表為：

$$P(S, t) = \begin{cases} P(S, t) & \text{if } S \geq \bar{S} \\ K - S_t & \text{if } S < \bar{S} \end{cases} \quad (31)$$

而由於本法在求算美式賣權價值係以最後一期為基礎，然後一期一期的向前推算，進而得到一積分項的提早執行貼水；因此，文獻上稱此一求算方法為遞迴積分法(recursive integration method)。基於本法係以數學的推導，因此其所得到的價格應屬理論值。

七.不同模擬方式的優缺點比較

於前節裡，介紹了五種以數值模擬方式求算美式賣權的方法，這些方法中，各有其優缺點，底下我們以表1來做說明：

表1 不同模擬方法的比較：

	精確度	計算成本	經濟直觀
1. binomial tree	高	高	稍低
2. finite difference	高	高	稍低
3. compound option	高	高	高
4. recursive integration	高	高	高
5. quadratic approximation	低	低	高

由上表可知，精確度最高的模擬法為有限差分法及二元樹狀法，通常學者們在做不同方法之比較時，多採上述二法做為比較基礎(benchmark)，例如：Barone-Adesi and Whaley(1987)及 Huang, Subrahmanyam and Yu(1996)等等；然而此二法的亦有其缺點：計算成本過高，且求算過程中並未考慮提前執行貼水的求算，因此經濟直觀略嫌不足。而複合式選擇權法的求算則是掌握了美式選擇權可以提前執行的特性，然而由於所求得的是一無窮多元累積常態分配的加總，因此不僅計算成本高，而且由於無法求算無窮多元累積常態分配，因此其精確度亦有所限制。

至於二次漸近法則僅是求得一漸近值並非理論值，因此其準確度最低。例如：Fabozzi, Hauser and Yaari(1990)研究外幣選擇權價格之實證文獻指出，對於存續期間較短的選擇權定價，其績效不佳。可是其優點在於計算快速，且提出提前執行貼水的觀念，引發了後續學者對於此一貼水價值更深入的研究，例如：遞迴積分法則進一步地求算此一提前執行貼水之理論值。

陸、結論：

本文詳細地介紹四種簡單選擇權的理論發展沿革，其中包括Black and Scholes(1973)利用無套利條件求算歐式買權、賣權的明確解值，另外Merton(1973)亦說明基於美式賣權持有者不會提前執行的特性，因此美式賣權的價格應等於歐式賣權。然而美式賣權則由於提早執行可能較有利於持有者，因此並不存在明確解。

同時，我們亦在第五節裡詳細地說明不同學者對於美式賣權的不同數值求解方法與精神，其中包括：多期二元樹狀分析法、有限差分法、複合式選擇權法、二次漸近法及遞迴積分法等等。值得一提的是，我們不僅須瞭解不同求解方法的應用，更重要的是要瞭解不同方法的思維形成。

最後，有一點必須強調，文中所得到的結果，都是立基於第三節裡的假設，例如：不發放股利、交易過程不存在交易成本、利率為常數、等等，如果這些假設任一個不成立的話，那麼上述的分析結果都可能被修正，有興趣的讀者亦可由此方向做更深入的研究。

附錄一：利用風險中立法求算BS歐式買權公式

根據風險中立的假設，我們可以將（1）式改如下：

$$dS = rSdt + \sigma Sdz$$

$$g(S_T|S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{\tau}S_T}} e^{-\frac{[\ln(S_T/S) - (r-0.5\sigma^2)\tau]^2}{2\sigma^2\tau}},$$

$$\begin{aligned} c &= e^{-rT} \int_0^\infty \max[S_T - K, 0] g(S_T|S) dS_T \\ &= e^{-rT} \left\{ \int_0^K 0 \cdot g dS_T + \int_K^\infty (S_T - K) \cdot g \cdot dS_T \right\} \\ &= e^{-rT} \left\{ \int_K^\infty S_T \cdot g dS_T - K \int_K^\infty g \cdot dS_T \right\} \\ &= e^{-rT} \int_K^\infty S_T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{\tau}S_T}} e^{-\frac{[\ln(S_T/S) - (r-0.5\sigma^2)\tau]^2}{2\sigma^2\tau}} dS_T \\ &\quad - Ke^{-rT} \int_K^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{\tau}S_T}} e^{-\frac{[\ln(S_T/S) - (r-0.5\sigma^2)\tau]^2}{2\sigma^2\tau}} dS_T \\ &= c_S - Ke^{-rT} c_K \\ &= S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2) \cdot \tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_2 + \sigma\sqrt{\tau}$$

因此底下我們只需證明： $c_S = S \cdot N(d_1)$ 及 $c_K = N(d_2)$ 即可，

證明 $c_K = N(d_2)$ ：

$$c_K = \int_K^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{\tau}S_T}} e^{-\frac{[\ln(S_T/S) - (r-0.5\sigma^2)\tau]^2}{2\sigma^2\tau}} dS_T$$

首先，利用變數變換法，令 $r-0.5\sigma^2 = \mu$ ，及

$$\frac{[\ln S_T - \ln S_0 - \mu\tau]}{\sigma\sqrt{\tau}} = Z，\text{進而移項並微分可得：}$$

$$S_T \sigma \sqrt{\tau} dZ = dS_T，\text{並帶回上式，可得：}$$

$$c_K = e^{-rT} K \int_{A_2}^{B_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{\tau}S_T}} e^{-0.5Z^2} S_T \sigma \sqrt{\tau} dZ$$

其中 A_2 與 B_2 分別為變數 Z 的積分下界與上界，而當 $S_T = K$ 可知 $\ln S_T = \ln K$ ，將此關係代入原式，即可解得 A_2 與 B_2 ，如下所示：

$$A_2 = \frac{\ln K - \ln S - (r-0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}，\text{且 } B_2 \rightarrow \infty$$

，再帶回原式可得：

$$\begin{aligned} c_K &= \int_{\frac{\ln K - \ln S - (r-0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5Z^2} dZ \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\ln S - \ln K + (r-0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5Z^2} dZ \\ &= \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5Z^2} dZ \\ &= N(d_2) = c_K \end{aligned}$$

得證！！

$$\text{其中 } d_2 = \frac{[\ln(S/K) + (r-0.5\sigma^2)\tau]}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

證明 $c_S = S \cdot N(d_1)$ ：

$$\begin{aligned} c_S &= e^{-rT} \int_K^\infty S_T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{\tau}S_T}} e^{-\frac{[\ln(S_T/S) - (r-0.5\sigma^2)\tau]^2}{2\sigma^2\tau}} dS_T \\ &= e^{-rT} \int_K^\infty e^{\ln S_T} \frac{1}{S_T} e^{-\ln S} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{\tau}}} e^{-\frac{[\ln S_T - \ln S - (r-0.5\sigma^2)\tau]^2}{2\sigma^2\tau}} dS_T \\ &= S \int_K^\infty e^{\ln S_T - \ln S - rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{\tau}}} e^{-\frac{[\ln S_T - \ln S - (r-0.5\sigma^2)\tau]^2}{2\sigma^2\tau}} dS_T \\ &= S \int_K^\infty e^{\ln S_T - (\ln S + rT - 0.5\sigma^2\tau) - 0.5\sigma^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{\tau}}} e^{-\frac{[\ln S_T - \ln S - (r-0.5\sigma^2)\tau]^2}{2\sigma^2\tau}} dS_T \end{aligned}$$

接下來，利用變數變換法，令：

$$\ln S_T = y, \ln S + (r - 0.5\sigma^2)\tau = \bar{y}, \text{ 及 } \sigma\sqrt{\tau} = u$$

。因此，上式可改寫為：

$$\begin{aligned} c_s &= S \int_K^\infty \frac{1}{S_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{y-\bar{y}-0.5u^2} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2u^2}} dS_T \\ &= S \int_K^\infty \frac{1}{S_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{y-\bar{y}-0.5u^2-\frac{(y-\bar{y})^2}{2u^2}} dS_T \end{aligned}$$

而上式指數次方的部分我們可以將其改寫如下：

$$\begin{aligned} y - \bar{y} - 0.5u^2 - \frac{(y - \bar{y})^2}{2u^2} &= \frac{1}{2u^2} [2u^2y - 2u^2\bar{y} - u^4 - (y - \bar{y})^2] \\ &= \frac{1}{2u^2} [2u^2y - 2u^2\bar{y} - u^4 - y^2 + 2y\bar{y} - \bar{y}^2] \\ &= \frac{1}{2u^2} [-\bar{y}^2 + 2u^2\bar{y} + u^4 + 2y(u^2 + \bar{y}) - y^2] \\ &= \frac{1}{2u^2} [-(\bar{y} + u^2)^2 + 2y(\bar{y} + u^2) - y^2] \\ &= -\frac{1}{2u^2} [y - (\bar{y} + u^2)]^2 \end{aligned}$$

再將以上因式分解的結果帶回原式，可得：

$$c_s = S \int_K^\infty \frac{1}{S_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}u} e^{-\frac{[y - (\bar{y} + u^2)]^2}{2u^2}} dS_T$$

再一次針對上式指數部分，利用變數變換法予以轉換如下：

$$q = \frac{y - (\bar{y} + u^2)}{u} = \frac{\ln S_T - [\ln S + (r - 0.5\sigma^2)\tau + \sigma^2\tau]}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$\text{且 } dq = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{S_T} dS_T, \text{ 因此可得： } dS_T = \sigma\sqrt{\tau} S_T dq$$

$$\begin{aligned} c_s &= S \int_{A_1}^{B_1} \frac{1}{S_T} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{\tau}} e^{-0.5q^2} \cdot \sigma\sqrt{\tau} \cdot S_T \cdot dq \\ &= S \int_{A_1}^{B_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5q^2} dq \\ &= S \int_{\{\ln K - [\ln S + (r - 0.5\sigma^2)\tau + \sigma^2\tau]\} / (\sigma\sqrt{\tau})}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5q^2} dq \\ &= S \int_{-d_1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5q^2} dq \\ &= S \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5q^2} dq \\ &= SN(d_1) = c_s \end{aligned}$$

得證！！

其中 A_1 與 B_1 分別為變數 q 的積分下界與上界，而當 $S_T = K$ 可知 $\ln S_T = \ln K$ ，將此關係代入原式，即可解得 A_1 與 B_1 ，如下所示：

$$A_1 = \frac{\ln K - [\ln S + (r - 0.5\sigma^2)\tau + \sigma^2\tau]}{\sigma\sqrt{\tau}}, \text{ 且 } B_1 \rightarrow \infty$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + 0.5\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

附註

- ¹ 作者為東吳大學國際貿易系副教授。很不幸地 Black 於 1995 年因喉癌去世，否則今年的經濟學獎，他亦應是得主之一。
- ² 對於新奇選擇權有興趣的讀者請參考 Hull(1997) 第 18 章。
- ³ 本節說明主要參考 Hull (1997)。
- ⁴ 此一對每一解值檢查的精神與前節多期二元樹狀模擬必須檢查每一個節點的精神一樣。
- ⁵ 事實上，由於電腦技術的精進，因此對於計算成本的考慮已經是逐漸可以被忽略。
- ⁶ 見 Carr Jarrow and Myneni(1992)，頁 90。
- ⁷ 利用風險中立定價方式求算選擇權價格的方法，可參考 Ingersoll(1987)。

參考文獻

- 1.Barone-Adesi,G. and R.E. Whaley,(1987), Efficient Analytic Approximation of American Option Values, *The Journal of Finance*, 301-320.
- 2.Black,F and M. Scholes, (1973), The Pricing of Option and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.
- 3.Brennan M.J. and E.S. Schwartz, (1977), The Value of American Put Options, *The Journal of Finance*, 449-462.
- 4.Bunch D.S. and H. Johnson, (1992), A Simple and Numerically Efficient Valuation Method for American Puts Using a Modified Geske-Johnson Approach, *The Journal of Finance*, 47, 809-816.
- 6.Courtadon G., (1982), A More Accurate Finite Difference Approximation for the Valuation of Options, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 27, 697-703.
- 7.Cox J.C., (1979), Option Pricing : A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263.
- 8.Dubofsky D.A, (1992), *Option and Financial Futures - Valuation and Uses*, McGraw-Hill Book Company
- 9.Geske R, (1979), The Valuation of Compound Options, *Journal of Financial Economics*, 7, 63-81.
- 10.Geske R. and H.E. Johnson, (1984), The American Put Option Valued Analytically, *The Journal of Finance*, 1511-1524.
- 11.Ho T.S., R.C. Stapleton, and M.G. Subrahmanyam,(1997),The Valuation of American Options with Stochastic Interest Rates : A Generalization of the Geske-Johnson Technique, *The Journal of Finance*, 52, 827-840.
- 12.Hull J.C, (1997), *Options, Futures, and other Derivatives*, third edition, Prentice-Hall, Inc. Press.
- 13.Hull J. and A. White, (1990), Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 87-100.
- 14.Ingersoll, J.E., (1987), *Theory of Financial Decision Making*, Rowman and Littlefield Publishers.
- 15.Johnson, H.E., (1983), An Analytic Approximation for the American Put Price, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, 141-148.
- 16.Malliarias A.G. and Brock, (1982), *Stochastic Method in Economics and Finance*, North-Holland Publishing Company
- 17.Merton R.C., (1973), Theory of Rational Option Pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.
- 18.Parkinson M., (1977), Option Pricing : The American Put, *Journal of Business*, 21-36.
- 19.Schwartz E.S., (1977), The Valuation of Warrants : Implementing a New Approach, *Journal of Financial Economics*, 4, 79-93.
- 20.Smith C.W., Jr., (1976), Option Pricing : A Review, *Journal of Financial Economics*, 3, 3-51.